

Казахский Национальный Университет имени аль-Фараби

УДК 531;553.982.2

На правах рукописи

**КЕНЖЕБАЕВА МЕРЕЙ ОМАРОВНА**

**Обратная задача гравиметрии для нефтегазового месторождения**

6D060300 - Механика

Диссертация на соискание степени  
доктора философии (PhD)

Отечественный научный консультант  
доктор физико-математических наук,  
профессор Серовайский С.Я.  
Зарубежный научный консультант  
доктор физико-математических наук,  
профессор, член-корр. РАН Кабанихин С.И.

Республика Казахстан  
Алматы, 2024

## СОДЕРЖАНИЕ

<b>ОБОЗНАЧЕНИЯ И СОКРАЩЕНИЯ</b> .....	4
<b>ВВЕДЕНИЕ</b> .....	5
<b>1 МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ГРАВИТАЦИОННОГО ПОЛЯ</b> .....	11
1.1 Описание процесса.....	11
1.1.1 Сила тяжести, ее потенциал и производные потенциала .....	16
1.1.2 Нормальное значение силы тяжести, редукции, аномалии силы тяжести и плотность горных пород .....	18
1.2 Математическая модель процесса.....	21
1.3 Постановка прямой задачи.....	22
1.4 Описание алгоритма программного обеспечения для прямой задачи .....	24
1.5 Анализ результатов прямой задачи на модельных данных .....	24
1.6 Решение прямой задачи на реальных данных.....	29
1.6.1 Постановка задачи .....	29
1.6.2 Методика исследования .....	30
1.6.3 Алгоритм программы «Converter» .....	31
Выводы по разделу 1.....	33
<b>2 ЗАДАЧА ВОССТАНОВЛЕНИЯ ПЛОТНОСТИ ГРАВИТАЦИОННОЙ АНОМАЛИИ ПО РЕЗУЛЬТАТАМ ИЗМЕРЕНИЯ ГРАВИТАЦИОННОГО ПОЛЯ НА ВНЕШНЕЙ ПОВЕРХНОСТИ</b> .....	35
2.1 Постановка обратной задачи .....	35
2.2 Единственность решения оптимизационной задачи .....	37
2.3 Вычисление производной функционалов.....	40
2.3.1 Обратная задача №1 .....	40
2.3.2 Обратная задача №2.....	45
2.4 Алгоритм решения.....	50
2.5 Результаты счета обратной задачи гравиметрии на модельных данных ...	54
2.5.1 Базовый вариант счета обратной задачи .....	54
2.5.2 Влияние изменения месторасположения аномалии при решении обратной задачи .....	55
2.5.3 Влияние изменения размера аномалии при решении обратной задачи	57
2.5.4 Критерии остановки минимизируемого функционала .....	58

Выводы по разделу 2 .....	59
<b>3 ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ГРАВИМЕТРИИ С ДАННЫМИ НА ВНУТРЕННЕЙ ПОВЕРХНОСТИ .....</b>	<b>61</b>
3.1 Постановка обратной задачи гравиметрии на модельных данных со значениями градиента гравитационного поля на внутренней границе.....	61
3.2 Единственность решения оптимизационной задачи .....	62
3.3 Нахождение градиента функционала.....	65
3.4 Метод Нелдера-Мида .....	71
3.5 Анализ результатов.....	72
3.5.1 Основной вариант счета .....	72
3.5.2 Влияние изменения месторасположения аномалии.....	73
3.5.3 Влияние изменения размеров аномалии .....	81
3.5.4 Влияние изменения критерия завершения алгоритма на результаты расчетов.....	82
3.5.5 Влияние выбора начального приближения на результаты расчетов....	82
Выводы по разделу 3 .....	83
<b>4 ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ГРАВИМЕТРИИ С ДАННЫМИ НА ВНУТРЕННЕЙ ПОВЕРХНОСТИ С ДВУМЯ НЕОДНОРОДНОСТЯМИ ..</b>	<b>85</b>
4.1 Постановка обратной задачи гравиметрии на модельных данных со значениями градиента гравитационного поля на внутренней границе с двумя неоднородностями .....	85
4.2 Вывод градиента функционала и сопряженной задачи для новой постановки с двумя аномалиями .....	87
4.3 Анализ результатов с двумя аномалиями.....	94
4.3.1 Основной вариант счета .....	94
4.3.2 Влияние изменения месторасположения двух аномалии .....	96
4.3.3 Влияние изменения размеров двух аномалии.....	96
4.3.4 Влияние изменения критерия завершения алгоритма на результаты расчетов.....	96
4.3.5 Влияние выбора начального приближения на результаты расчетов....	97
Выводы по разделу 4 .....	97
<b>ЗАКЛЮЧЕНИЕ .....</b>	<b>99</b>
<b>СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ.....</b>	<b>Error! Bookmark not defined.</b>

## ОБОЗНАЧЕНИЯ И СОКРАЩЕНИЯ

$F$	– сила тяжести
$F_n$	– сила ньютоновского притяжения всей массой Земли
$P$	– центробежная силы, возникающей вследствие суточного вращения Земли
$g$	– ускорение силы тяжести
$f$	– ньютоновское притяжения
$r$	– расстояние между центрами масс $m$ и $M$
$G$	– гравитационная постоянная
$R$	– ось вращения
$\omega$	– угловая скорость вращения Земли
$\sigma_3$	– средняя плотность Земли
$W$	– потенциал силы тяжести
$A$	– работа
$\gamma_0$	– нормальным значением силы тяжести
$g_3$	– сила тяжести на экваторе
$\varphi$	– географическая широта пункта наблюдения
$\beta$	– коэффициент, зависящий от угловой скорости вращения и сжатия сфероида
$\lambda$	– географическая долгота точки наблюдения
$g_n$	– значение силы тяжести при наблюдении
$\Delta g_\varphi$	– аномалия Фая
$\Delta g_B$	– аномалия Буге
$\sigma$	– плотность горных пород
$\eta(x, y)$	– потенциал гравитационного поля в точке $(x, y)$
$\varphi(x, y)$	– потенциал поля $(x, y)$
$\pi$	– константа
$\psi(x, y)$	– плотность вещества в точке $(x, y)$
$\eta_1(x, y)$	– потенциал гравитационного поля на поверхности Земли
$\eta_2(x, y)$	– градиент гравитационного поля на поверхности Земли
$\Delta$	– оператор Лапласа
$\Omega_0$	– область аномалии
$\Omega$	– исследуемая область нефтяного месторождения

## ВВЕДЕНИЕ

**Актуальность темы исследования.** Среди основных энергоносителей в современном мире нефть занимает особое место, оставаясь при этом еще стратегически важным продуктом, оказывающим значительное влияние на мировую экономику. Наращивание объемов добычи нефти напрямую зависят от точных данных месторасположения нефти в недрах месторождения.

По энерго и трудоемкости среди основных этапов в добыче нефти можно выделить этап разведки нефтегазового месторождения. Он связан с большими затратами труда, времени и средств. На технико-экономические показатели разведочных работ влияют такие факторы, как точность измерительных приборов и инструментов, организация их режимов работ, влияние окружающей среды на измерения показаниями приборов и др. При этом из практики эксплуатации нефтегазовых месторождений известно, что нефть в процессе извлечения может перетекать в соседние пространства под действием давления и других факторов, что весьма усложняет процесс добычи нефти. Происходит это по причине сложных физических процессов и явлений в эксплуатационной работе месторождения, обусловленных техническими, технологическими и геологическими факторами в результате сложного взаимодействия. Большие пространственные перемещения нефти, которые, как правило, носят случайный характер. Воздействие сил атмосферного давления и другие осложняющие факторы. Все они требуют тщательного исследования влияния указанных факторов на динамику движения нефти с целью прогнозирования дальнейших действия при эксплуатации нефтегазового месторождения.

Современное состояние указанных проблем мало изучено. В основном разведочные работы производятся при первоначальной разведке месторождения и не производятся повторно в связи с большими временными и финансовыми затратами. Исходные разведочные данные позволяют существенно сузить круг рассматриваемых проблем и дает лишь их первое приближение, на основе которых можно делать ускоренную разведку. При этом количество гравиметрических данных очень ограничено, усложняя при этом математическую сторону их решения. Имеющиеся математические модели, как правило, не допускают всестороннего качественного и количественного анализа обратных задач гравиметрии. Необходимы разработки современных математических моделей разведки нефтегазовых месторождений с позиций возможности высоко вычислительных средств. Применение современных математических методов их решения с применением высокопроизводительных вычислительных комплексов и пакетов визуализации для анализа динамики нефтяных месторождений в процессе добычи нефти с целью обеспечения бесперебойных работ по добычи недр.

Таким образом, **актуальность темы исследования** не вызывает сомнений, представляет научный и практический интерес.

**Цель работы:** разработка математической модели и решение обратной задачи гравиметрии для восстановления плотности полезных ископаемых на основе данных гравитационных измерений (гравиразведки) для нефтегазовых месторождений.

В связи с поставленной целью вытекают **следующие задачи исследования:**

- математическое моделирование распределения потенциала гравитационного поля в неоднородной среде;
- разработка алгоритма численного исследования математической модели, его программная реализация и анализ влияния параметров процесса;
- постановка задачи восстановления плотности гравитационной аномалии по результатам измерения гравитационного поля на внешней поверхности;
- разработка алгоритма решения обратной задачи гравиметрии для нефтегазовых месторождений и ее программная реализация;
- численное решение обратной задачи гравиметрии для нефтегазовых месторождений с использованием данных гравиразведки.

**Объект исследования.** Объектом исследования являются геолого-литологические профили месторождений, гравиметрические данные, применяемые в нефтегазодобывающей промышленности для геодинамического мониторинга нефтегазовых месторождений, изменяющиеся под влиянием внешних сил и окружающей среды.

**Предмет исследования.** Предметом исследования являются обратная задача гравиметрии нефтегазовых месторождений с учетом осложняющих факторов в процессе добычи нефти.

**Методы исследований:** методы нелинейной механики деформируемых сред; методы математического моделирования задач геофизики; вариационные методы; современные численные методы информационных технологии; пакеты символьных вычислений для численного моделирования и визуализации технологических процессов; теория прямых и обратных задач; теория обратных задач математической физики; теория оптимального управления.

**Научная новизна работы состоит** в постановке новых прямых и обратных задач геофизики. Качественный анализ решаемых обратных задач геофизики. Разработка алгоритмов решения обратных задач геофизики и их программная реализация.

**Научные положения, выносимые на защиту**

- математическая модель распространения гравитационного поля в нефтегазовом месторождении, численное решение задачи и соответствующее программное обеспечение, оценка влияния параметров процесса, определение потенциала гравитационного поля на основе реального геолого-литологического профиля нефтяного месторождения;
- постановка задачи восстановления плотности гравитационной аномалии по результатам измерения гравитационного поля на внешней поверхности, доказательство единственности решения задачи, разработка и программная

реализация алгоритма решения обратных задач с использованием градиентного метода и метода Монте-Карло, оценка точности решения обратной задачи в зависимости от места расположения гравитационной аномалии и ее размеров;

– постановка обратной задачи гравиметрии с данными на внутренней поверхности при наличии двух гравитационных аномалий, разработка и программная реализация алгоритма решения обратной задачи с использованием метода Нелдера-Мида, оценка точности решения обратной задачи в зависимости от взаимного расположения гравитационных аномалий и их размеров;

**Достоверность и обоснованность научных положений, выводов и результатов диссертационной работы** подтверждается использованием основных фундаментальных законов и соотношений механики деформируемого твердого тела при построении математических моделей; сравнением результатов счета с экспериментальными данными; сопоставлением и удовлетворительным согласованием полученных моделей и результатов исследования с результатами работ других авторов; доказанными теоремами, подтверждающими корректность применяемых математических методов.

#### **Теоретическая и практическая значимость исследования.**

Теоретическая значимость работы заключается в разработке новых математических моделей распределения гравитационного поля в нефтегазодобывающем пласте, в развитии методов идентификации этих моделей и алгоритмов решения соответствующих прямых и обратных задач гравиразведки. Результаты диссертационной работы могут быть использованы для мониторинга действующих нефтегазовых месторождений на основе гравиметрических измерений и проектирования новых месторождений полезных ископаемых. Разработанные методы и их программная реализация могут быть использованы также для решения различных задач компьютерной томографии.

Практическая значимость диссертационных исследований состоит в том, что применение современных методов математического моделирования и компьютерных технологий максимально приближает полученные результаты к реальным процессам, позволяет с высокой точностью прогнозировать значение плотности аномалии нефтегазового месторождения, обеспечивая эффективную и надежную подземную картину нефтегазодобывающей отрасли.

**Связь данной работы с другими научно-исследовательскими работами.** Данная работа выполнена в рамках проектов программы грантового финансирования фундаментальных исследований в области естественных наук «Разработка геоинформационной системы для решения задачи гравиметрического мониторинга состояния недр нефтегазоносных районов Казахстана на основе высокопроизводительных вычислений в условиях ограниченного объема экспериментальных данных» (2018- 2020 гг., АР05135158-ОТ-19).

**Апробация работы.** Основные результаты работы докладывались и обсуждались на следующих мероприятиях:

- научные семинары Института механики и машиноведения имени У.А. Джолдасбекова (2017 - 2023 гг., Алматы);
- Международная конференция «Inverse Problems in Finance, Economics and Life Sciences» (КазНУ им. аль-Фараби, Алматы, Казахстан, декабрь 2017 г.);
- V Международная конференция «Фарабиевские чтения» (КазНУ им. аль-Фараби, Алматы, Казахстан, апрель 2018 г.);
- Международная научно-практическая конференция «Актуальные проблемы информатики, механики и робототехники. Цифровые технологии в машиностроении» (ИММаш им. У.А. Джолдасбекова, Алматы, Казахстан, октябрь 2018 г.);
- Десятая международная молодежная научная школа-конференция «Теория и численные методы решения обратных и некорректных задач» (НГУ, Новосибирск, Россия, октябрь 2018 г.);
- XIII международная конференция «Параллельные вычислительные технологии» (Калининград, Россия, апрель 2019 г.);
- Одиннадцатая международная молодежная научная школа-конференция «Теория и численные методы решения обратных и некорректных задач» (НГУ, Новосибирск, Россия, август 2019 г.);
- Традиционная международная апрельская математическая конференция в честь Дня работников науки Республики Казахстан, посвященная 1150-летию Абу Насыр аль-Фараби и 75-летию Института математики и математического моделирования. (Алматы, Казахстан, апрель 2020 г.);
- научные семинары кафедры Механики КазНУ им. аль-Фараби (2017–2024 гг., Алматы).

### **Публикации**

По теме диссертации автором было опубликовано 15 работ [1-15], в том числе 2 публикации в научных изданиях, входящих в перечень рекомендованных Комитетом по контролю в сфере образования и науки МОН РК для публикации основных результатов научной деятельности [1, с. 20–26; 5, с. 269-274], 4 публикация в научном журнале индексируемый базой данных Scopus [3, с. 29–35; 6, с. 121-126; 11, с. 140-145; 14, с. 012017]; 9 публикаций в трудах зарубежных и отечественных научных конференций, среди которых 1 публикации в материалах зарубежных конференций [7, с. 72-79], 4 публикации в трудах всероссийских научных конференций [8, с. 30; 9, с. 58; 13, с. 30; 15, с. 327-338], 4 публикации в материалах отечественной конференции [2, с. 16; 4, с. 106; 10, с. 143 - 144; 12, с. 91 - 92]. Получено одно авторское свидетельство на разработанную программу «Converter» [16].

Опубликованные по теме диссертации работы приводятся в списке литературы.

### **Личный вклад автора**

Основные результаты исследований, изложенные в диссертационной работе, получены автором самостоятельно. В совместной статье [7, с. 72-79] соискателем была проделана основная часть работы, соавторы участвовали в постановке задачи и обсуждении результатов. В [1, с. 20-26] отечественным научным руководителем Серовайским С.Я. была поставлена задача, соискателю Кенжебаевой М.О. принадлежит численная реализация модели, ее качественный и количественный анализ и обсуждение результатов. В работе [15, с. 327-338] соавторам принадлежит постановка задачи и реализация метода Монте-Карло, соискателю – численная реализация модели и анализ результатов. В статье [6, с. 121-126] соискатель внес вклад в построении модели и анализ результатов с соавтором Тойганбаевой Н.А.

**Структура и объем диссертации.** Диссертационная работа состоит из титульного листа, содержания, обозначений и сокращений, введения, четырех разделов, заключения, списка использованных источников из 70. Общий объем диссертации составляет 106 страниц, включая 13 иллюстрации и 21 таблицу.

### **Основное содержание диссертации**

Во введении отражены следующие моменты: актуальность темы диссертационного исследования, основная цель работы, объект, предмет и методы исследования, научная новизна, научно-практическое значение диссертационной работы, степень ее разработанности.

В первой главе описывается современное состояние исследуемой проблемы, проводится обзор существующих работ в области исследования обратных задач гравиметрии. А также дано описание процесса, математическая модель прямой задачи гравиметрии, доказательство единственности решения оптимизационной задачи, вычисление градиента функционала, решение прямой задачи на реальных данных.

Во второй главе описывается решение обратной задачи градиентным методом: генерация искусственных значений потенциала и градиента гравитационного поля, решение обратной оптимизационной задачи методом Монте-Карло, а также приведены анализы полученных вычислений при изменении месторасположения, размера аномалии и влияние значения эпсилона на минимизируемый функционал.

Третья глава связана с разработкой уточненной математической модели распространения потенциала гравитационного поля аномалии с учетом таких осложняющих факторов как: граничные условия исследуемой области, значения градиента гравитационного поля на внутренней области и т.д. Проводится постановка уточненной обратной задачи гравиметрии, вывод градиента функционала и сопряженной задачи, доказательство строгой выпуклости функционала, анализ результатов численного решения поставленной задачи.

В четвертой главе мы рассматриваем обратную задачу гравиметрии с двумя аномалиями. Приводятся постановка задачи, вывод градиента функционала и сопряженной задачи, анализ результатов численных расчетов с двумя аномалиями методом Нелдера-Мида.

В заключении приводятся основные результаты и выводы, полученные в диссертационной работе.

### **Благодарность**

Автор выражает глубокую признательность отечественному научному консультанту д.ф.-м.н., профессору Серовайскому Семёну Яковлевичу за научное руководство, неоценимую помощь и ценные советы на всех этапах выполнения диссертационной работы и зарубежному научному консультанту член корреспондент РАН, профессору Кабанихину Сергей Игоревичу за поддержку, плодотворную работу и теплый прием во время научной стажировки (Новосибирский государственный университет, Институт вычислительной математики и математической геофизики, Россия).

# 1 МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ГРАВИТАЦИОННОГО ПОЛЯ

Первая глава диссертации посвящена описанию физического процесса рассматриваемой задачи, математической модели постановки прямой задачи. Подробно описан алгоритм решения прямой задачи. Детально проанализировали решение прямой задачи на модельных данных. А также раздел 1.6 посвящен решению прямой задачи на реальных данных. В этом разделе дана постановка прямой задачи на реальных данных. Подробно описана методика исследования задачи с реальными данными. Описан алгоритм работы программы «Converter». Были сделаны расчеты градиента гравитационного поля на основе геолого-литологических профилей, любезно предоставленных нам компанией ГеоКен.

## 1.1 Описание процесса

Проблема изучения глубинного строения земной коры является одной из стратегических направлений геофизических исследований, обеспечивающих развитие наук о Земле. При этом гравиразведка является одним из основных методов изучения строения земной коры.

Гравиметрическая или гравитационная разведка (сокращенно гравиразведка) – это геофизический метод исследования строения литосферы, поисков и разведки полезных ископаемых, базирующийся на изучении гравитационного поля Земли. Основным измеряемым параметром этого метода является ускорение свободного падения.

Хотя поле силы тяжести ученые изучают давно, например, Г. Галилей в 1590 г. первый получил ускорение свободного падения, наблюдая за падением тел, а М.В. Ломоносов разработал для его измерения идеи пружинного и газового гравиметров, однако лишь в 30-40-х годах XX столетия необходимая точность измерений была технически реализована в гравиметрах, маятниковых приборах, а также вариометрах и градиентометрах. Эти приборы предназначены для измерения ускорения свободного падения и его градиентов [17].

При измерении параметров гравитационного поля в воздухе, на земной поверхности, акваториях морей и океанов наблюдаются их изменения, обусловленные в основном двумя причинами. Во-первых, планетарными особенностями Земли (скорость вращения, масса, форма поверхности, внутреннее строение), создающими плавно изменяющееся поле, называемое нормальным. Во-вторых, различием плотности горных пород и руд, связанным с плотностными неоднородностями среды, образующими аномальное поле силы тяжести. В задачи гравиразведки входят измерения значений параметров поля силы тяжести, выделение аномальных составляющих гравитационного поля и их геологическая интерпретация.

От других геофизических методов гравиразведка отличается сравнительно большой производительностью полевых наблюдений и успешно применяется

при решении самых различных геологических задач с глубиной исследований от нескольких метров (при разведке окрестностей горных выработок) до десятков километров (при определениях мощности земной коры и литосферы).

По изучаемым объектам (геологическим структурам) гравиразведка тесно связана с геологией и другими геофизическими методами, а используемые измерительные приборы, методы выделения и интерпретации аномалий опираются на достижения физико-математических наук.

В настоящее время большинство добываемых крупных месторождений нефти и газа практически исчерпали свою нефтеносность. В связи с этим появился высокий интерес к небольшим «законсервированным» месторождениям. Благодаря научно-техническому прогрессу трудоёмкость добычи углеводородного сырья из таких месторождений во много раз уменьшилась.

В период эксплуатации нефтегазовых месторождений возникают проблемы с извлечением нефти. Нефть может «передвигаться» с места на место. И в процессе эксплуатации точное местоположение нефти сложно определить. Так как разведка месторождения происходит на начальном этапе проектирования, то далее в процессе добычи уже не происходит анализ изменения местоположения в связи с изменившейся ситуацией. Повторный поиск не производится в связи с большими финансовыми затратами на разведку.

Решая обратную задачу гравиметрии для нефтегазового месторождения, возможно достаточно точно обнаружить нефть и газ без больших финансовых затрат, что значительно упростило бы процесс добычи и принятия решения о применяемых методах эксплуатации скважин.

Основы обратных задач геофизики хорошо описаны в работах [18, 19]. В работе подробно описаны основы большинства прикладных обратных задач. Даны основные понятия о физической постановке задачи гравиметрии, описаны принципы решения прямых и обратных задач гравиразведки, имеются аналитические способы решения обратных задач для простых форм аномалии. В работе [20] рассматривается аномалия в двухслойной среде. Дан краткий обзор подходов к построению итерационных процессов ньютоновского и градиентного типов. Сам автор и его ученики преимущественно рассматривают интегральные уравнения постановки обратных задач гравиметрии.

В работах [1, с. 20–26; 2, с. 16] более подробно описана математическая модель постановки прямой задачи, проведён анализ эффектов поведения потенциала гравитационного поля и его градиента вблизи граничных условий при решении прямой задачи гравиметрии.

В работе Керимова И.А. [21] показана эффективность применения гравимагнитных данных для изучения разломной тектоники и прогнозирования нефтегазоперспективных ловушек в глубоководных горизонтах Предкавказья.

В фундаментальной работе В.Н. Страхова [22] обобщены алгоритмы редуцирования и трансформации потенциальных полей, заданных в пунктах с различными высотами. в последний период В. Н. Страховым опубликован ряд крупных работ [23–27] и др., в которых излагается разработанный им метод линейных интегральных представлений, который позволяет принципиально по-новому решать ряд задач гравиметрии и магнитометрии.

Методологическим вопросам геологии и геофизики посвящен ряд работ [28-35] и др. Наиболее детально вопросы методологии интерпретационного процесса в гравиметрии и магнитометрии освещены в работах В. Н. Страхова [36–47].

В работе В.К. Хмелевской и В.И. Костицына [48] подробно рассмотрены физико-геологические основы геофизических методов, принципы решения прямых и обратных задач, даны общие сведения об аппаратуре, методике и технике проведения работ, обработке и интерпретации геофизических материалов. Приведены геологические задачи, решаемые гравиразведкой, магниторазведкой, электроразведкой, сейсморазведкой, терморазведкой, ядерной геофизикой и геофизическими методами исследований скважин.

В книге М.А. Алексидзе [49] приводится систематизированное углубленное изложение математических и вычислительных аспектов интерпретации гравитационного поля. Основное внимание уделено обратным задачам построения региональных гравитационных моделей. В частности, рассматриваются различные способы параметризации и впервые приводятся границы устойчивости обратных задач гравиметрии, которые дают представление о том, при какой детальности интерпретации соответствующий вычислительный процесс будет устойчивым. По всем рассмотренным задачам проведены вычислительные эксперименты, результаты которых отражены в книге и согласуются с полученными теоретическими оценками.

Один из вариантов обратной задачи (задача интерпретации гравитационных данных) [50, 51] математически сводится к решению интегрального уравнения Фредгольма I рода или к минимизации суммы квадратов невязок между измеренными и вычисленными значениями потенциала (или напряженности) в ряде точек поверхности Земли. Это позволяет определить параметры месторождения (плотность, форму, размеры, массу, глубину залегания и т.д.). Такому варианту обратной задачи гравиметрии посвящены работы В.И. Старостенко, В.Н. Страхова и др. [52–55]. Данную задачу можно рассматривать как задачу томографии [56] или внутривидения [57]. При этом вводятся упрощающие модели месторождений: в виде четырехугольных усеченных пирамид, призм, цилиндров, брусков, многогранников, параллелепипедов, пересекающихся стержней и т.д. [58, 59]. Однако такие фигуры обладают негладкими поверхностями и порождают громоздкие (хотя и несложные) формулы. В работе [60] предложено для моделирования месторождений использовать однородные (а также неоднородные) сфероиды.

Используя измеренные на поверхности Земли аномалии потенциала или напряженности гравитационного поля, можно определить аномалии плотности вещества под поверхностью Земли (в ее коре, мантии и т.д.) в некоторой пространственной области  $D$ . При этом потенциал или/и напряженность гравитационного поля (или их аномалии) можно измерить с помощью гравиметров [61].

В работе [62] Рассматривается обратная задача гравиметрии, где неизвестными одновременно являются и геометрические параметры геологических тел, и плотности горных пород, слагающих эти тела.

В работе Е.Н. Акимова, Д.В. Белоусова, В.Е. Мисилова [63] рассматривается задача восстановления плотности в слое по результатам измерения на поверхности земли. Решается с помощью сведения к уравнению Фредгольма 1 рода.

В работе [64] исследовано восстановление распределения плотности из уравнения Пуассона по известному значению потенциала гравитационного поля в области. Задача решается с помощью линейного программирования.

Проведенный анализ работ по решению обратных задач гравиметрии показывает недостаточную исследованность проблемы, касающаяся восстановление плотностной структуры нефтяного месторождения с учетом влияния осложняющих факторов и неопределенностей, что обуславливает актуальность проводимого исследования в данной диссертационной работе и необходимость дальнейшего более детального изучения обратных задач гравиметрии с применением современных методов моделирования и вычислительных возможности программных продуктов.

В связи с этим формируется цель диссертационной работы, заключающаяся в разработке математической модели и решение обратной задачи гравиметрии для восстановления плотности полезных ископаемых на основе данных гравитационных измерений (гравиразведки) для нефтегазовых месторождений.

В связи с поставленной целью вытекают следующие задачи исследования:

- математическое моделирование распределения потенциала гравитационного поля в неоднородной среде;
- разработка алгоритма численного исследования математической модели, его программная реализация и анализ влияния параметров процесса;
- постановка задачи восстановления плотности гравитационной аномалии по результатам измерения гравитационного поля на внешней поверхности;
- разработка алгоритма решения обратной задачи гравиметрии для нефтегазовых месторождений и ее программная реализация;
- численное решение обратной задачи гравиметрии для нефтегазовых месторождений с использованием данных гравиразведки.

Объект исследования. Объектом исследования являются геолого-литологические профили месторождения, гравиметрические данные, применяемые в нефтегазодобывающей промышленности для геодинамического

мониторинга нефтегазовых месторождений, изменяющиеся под влиянием внешних сил и окружающей среды.

*Предмет исследования.* Предметом исследования являются обратная задача гравиметрии нефтегазовых месторождений с учетом осложняющих факторов в процессе добычи нефти.

В соответствии с поставленной целью диссертации, то есть решения обратной задачи гравиметрии для нефтегазового месторождения, начнем с приведения основных сведений об исследуемой системе. Мы рассматриваем двумерную область (по  $Ox$  -поверхность земли, по  $Oy$  – глубина залегания нефтяного месторождения). Используя ежегодные данные по гравиметрическим изменениям на месторождениях в рамках геодинимического мониторинга, решаем обратную задачу гравиметрии для двух аномалии. Так как за основу мы берем геолого-литологические профили, полученные при разработке нефтяного месторождения, то примерное месторасположение аномалии у нас уже имеются. Решая поставленную задачу, мы восстанавливаем плотность или подземную структуру с учетом произошедших изменений в процессе выработки (эксплуатации) нефтяного месторождения. Результаты наших вычислений позволяют понять плотностную структуру месторождения с учетом изменившейся ситуации и делать оперативные выводы для дальнейшей эксплуатации нефтяного месторождения. Заметим, что финансовых больших затрат наш метод не предполагает. Гравиметрический мониторинг месторождений производится каждый год или раз в два года, но данные по гравиметрам не используются для анализа подземной текущей ситуации. Мы же предлагаем использовать гравиметрические данные и на основе их решаем обратную задачу гравиметрии, позволяющую достаточно хорошо описывать плотностную структуру нефтяного месторождения на текущее время.

В данной работе будет представлено краткое изложение одного из методов геофизического исследования земной коры и разведки полезных ископаемых, а именно гравиметрическая или гравитационная разведка (сокращенно гравиразведка), основанная на изучении распределения аномалий поля силы тяжести Земли вблизи земной поверхности, акваториях, в воздухе. Поле силы тяжести обусловлено в основном Ньютоновским притяжением Землей всех тел, обладающих массой. Так как Земля сферически неоднородна, да еще вращается, то поле силе тяжести на земной поверхности непостоянно. Изменения эти малы и требуют высокочувствительных приборов для их изучения. Основными измеряемыми параметрами гравитационного поля являются ускорение силы тяжести и градиенты (изменения ускорения по разным направлениям). Величины параметров поля силы тяжести зависят, с одной стороны, от причин, обусловленных притяжением и вращением Земли (нормальное поле), а с другой стороны - от неравномерности изменения плотности пород, слагающих земную кору (аномальное поле). Эти две основные причины изменения силы тяжести на Земле послужили основой двух направлений гравиметрии: геодезической гравиметрии и гравитационной разведки.

От других методов разведочной геофизики гравиразведка отличается сравнительно большой производительностью полевых наблюдений и возможностью изучать горизонтальную (латеральную) неоднородность Земли. Гравиразведка применяется для решения самых различных геологических задач с глубиной исследований от нескольких метров (например, при разведке окрестностей горных выработок) до 200 километров (например, при изучении мантии) [20, с. 26–37].

Эти сведения носят вводный характер и включают в себя известные сведения, необходимые для дальнейшего изложения.

### 1.1.1 Сила тяжести, ее потенциал и производные потенциала

Силой тяжести ( $F$ ) называют равнодействующую двух сил - силы ньютоновского притяжения всей массой Земли ( $F_H$ ) и центробежной силы, возникающей вследствие суточного вращения Земли ( $P$ ). Отнесенные к единице массы, эти силы характеризуются ускорениями силы тяжести  $g = F/m$ , ньютоновского притяжения  $f = F_H/m$  и центробежным  $P = P/m$ . Ускорение силы тяжести равно геометрической сумме ускорения притяжения и центробежного ускорения. Обычно в гравиметрии, когда говорят "сила тяжести", подразумевают именно ускорение силы тяжести.

Единицей ускорения в системе СИ является  $m/c^2$ . В гравиметрии традиционно используют более мелкую единицу - Гал, равный  $1 \text{ см}/c^2$ . В среднем на Земле  $g=981$  Гал. В практике гравиразведки применяются величины в 1000 раз меньшая, получившая название миллигал (мГал).

Сила притяжения какой-либо массы ( $m$ ) всей массой Земли ( $M$ ) определяется законом всемирного тяготения Ньютона:

$$F_H \approx G \frac{mM}{r^2},$$

где  $r$  - расстояние между центрами масс  $m$  и  $M$ , т.е. радиус Земли;  $G$  - гравитационная постоянная, равная  $G = 6,67 * 10^{-11} \text{ м}^3/\text{кг} * \text{с}^2$ . Сила притяжения единичной массы ( $m=1$ ) равна  $f \approx GM/r^2$  и направлена к центру Земли.

Центробежная сила ( $P$ ) направлена по радиусу, перпендикулярному оси вращения ( $R$ ), и определяется формулой

$$P = mR\omega^2,$$

где  $\omega$  - угловая скорость вращения Земли.

Величина  $P$  изменяется от нуля на полюсе ( $R=0$ ) до максимума на экваторе. Отношение  $P/F \leq 1/288$ , поэтому сила тяжести почти целиком определяется силой притяжения, а ускорение силы тяжести практически равно ускорению притяжения  $g \approx f \approx GM/r^2$ .

Земля в первом приближении является эллипсоидом вращения, причем экваториальный радиус  $a \approx 6378$  км, а полярный  $c \approx 6357$  км,  $a - c = 21$  км. Разная величина радиуса Земли на полюсе и экваторе наряду с изменением центробежной силы приводит к увеличению  $g$  на полюсе ( $g_n = 983$  Гал) по сравнению с  $g$  на экваторе ( $g_э = 978$  Гал). По известным  $g$  и  $r$  были определены масса Земли  $M = 5,98 \cdot 10^{24}$  кг и ее средняя плотность

$$\sigma_3 = 5,51 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3 \text{ (5,51 г/см}^3\text{)}.$$

Потенциал силы тяжести ( $W$ ) был введен в теорию гравиметрии для облегчения решения теоретических задач. В точке  $A$ , расположенной на расстоянии  $r_A$  от центра Земли, выражение для потенциала принимается равным:  $W_A = GM/r_A$ , а в любой точке  $B$ , расположенной на продолжении радиуса  $r$ ,  $W_B = GM/(r_A + \Delta r)$ . Поэтому разность потенциалов будет равна:

$$\Delta W = W_B - W_A = GM / \left[ \frac{-\Delta r}{r_A(r_A + r_B)} \right].$$

В пределе при малой  $\Delta r$  имеем:

$$\Delta W = -\frac{GM\Delta r}{r^2} = -g\Delta r,$$

отсюда  $g = -dW/dr$ , т. е. сила тяжести есть производная потенциала силы тяжести по направлению к центру Земли. С другой стороны, работа, которая может быть произведена при движении притягиваемой точки по отрезку  $\Delta r$ , равна  $\Delta A = g\Delta r$ . Поэтому  $\Delta W = -\Delta A$ , или работа силы тяжести по перемещению единичной массы на отрезке  $\Delta r$  равна разности значений потенциала на концах этого отрезка.

При перемещении точки в направлении, перпендикулярном силе тяжести,  $dW = 0$ . Это означает, что  $W = \text{const}$ . Поэтому гравитационное поле можно представить в виде набора бесконечного числа поверхностей, на которых потенциал остается постоянным, а ускорение силы тяжести направлено перпендикулярно этой поверхности. Такие поверхности называют эквипотенциальными или уровнями. В частности, поверхность жидкости на Земле, например, моря, совпадает с уровнем поверхности. У Земли есть одна уникальная уровенная поверхность, которая совпадает с невозмущенной волнениями поверхностью океанов. Она называется геоидом. Таким образом, геоид — это условная уровенная поверхность, которая совпадает со средним уровнем океанов и открытых морей, проходит под сушей и по определению везде горизонтальна, а ускорение силы тяжести к ней перпендикулярно.

Производные потенциала силы тяжести по трем координатным осям  $g_x \frac{\partial W}{\partial x}, g_y \frac{\partial W}{\partial y}, g_z \frac{\partial W}{\partial z}$  однозначно определяют его полный вектор. В частности, если ось  $z$  направить к центру Земли, то  $\frac{\partial W}{\partial x} = \frac{\partial W}{\partial y} = 0$ , а  $g = \frac{\partial W}{\partial z}$ .

В гравиметрии кроме первых производных изучаются вторые производные потенциала или их разности:

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial z}, \quad \frac{\partial^2 W}{\partial y \partial z}, \quad \frac{\partial^2 W}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 W}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial^2 W}{\partial z^2}, \quad \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 W}{\partial y^2}.$$

Физический смысл этих выражений легко получить, если иметь в виду, что  $g = \frac{\partial W}{\partial z}$ . Так, например, вторая производная  $\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial z} = \frac{\partial g}{\partial x}$  указывает на скорость изменения силы тяжести по оси  $x$ , т.е. является горизонтальным градиентом силы тяжести. Аналогичный смысл имеют вторые производные  $\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial z}$  и  $\frac{\partial^2 W}{\partial z^2}$ . Вторые производные  $\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 W}{\partial y^2}$  характеризуют форму уровенной поверхности (геоида), изучаемую в геодезической гравиметрии. Практической единицей измерения градиента силы тяжести принимается

$$1 \text{ этвеш (Е)} = 10^{-9}/c^2,$$

что соответствует изменению силы тяжести в 0,1 мГал на 1 км. [19, с. 26–37].

1.1.2 Нормальное значение силы тяжести, редукции, аномалии силы тяжести и плотность горных пород

Нормальным значением силы тяжести ( $\gamma_0$ ) называется сила тяжести, обусловленная суточным вращением и притяжением Земли, в предположении, что она состоит из однородных по плотности концентрических слоев. Принимая Землю за сфероид, Клеро получил следующую приближенную формулу для ее расчета:

$$\gamma_0 = g_3(1 + \beta \sin^2 \varphi),$$

где  $g_3$  - сила тяжести на экваторе;  $\varphi$  - географическая широта пункта наблюдения;  $\beta$  - коэффициент, зависящий от угловой скорости вращения и сжатия сфероид. Однако Земля - геоид, и нормальные значения силы тяжести для его поверхности рассчитываются по формуле:

$$\gamma_0 = g_3(1 + \beta \sin^2 \varphi - \beta_1 \sin^2 2\varphi + \beta_2 \cos^2 \varphi \cos 2\lambda),$$

где  $\lambda$  - географическая долгота точки наблюдения. Коэффициенты  $\beta$ ,  $\beta_1$  и  $\beta_2$  зависят от формы Земли, ее угловой скорости вращения, распределения масс.

По многочисленным измерениям можно определить эти неизвестные коэффициенты. В настоящее время используется формула, в которой коэффициенты равны:

$$\beta = 0,0053024, \beta_1 = 0,0000059, \beta_2 = 0 \text{ и } g_3 = 978,013 \text{ Гал.}$$

Составлены специальные таблицы, по которым легко определить величину  $\gamma_0$  для любой точки земной поверхности. Измерив  $g_n$  в какой-то точке и вычтя  $\gamma_0$  получим аномалию силы тяжести. Таким образом, геоид является поверхностью относимости, по отношению к которой рассчитываются аномалии.

В наблюдении значения силы тяжести вводится поправки (редукции). Введение поправок необходимо потому, что нормальные значения относятся к поверхности геоида, которая совпадает с уровнем океана, а измеренные значения относятся к действительной (реальной) земной поверхности. Для того что бы все наблюдения силы тяжести были сопоставимы, их приводят к одной поверхности - уровню геоида, т. е. как бы опускают точку наблюдения на этот уровень. Это осуществляется путем введения поправок за высоту, за притяжение промежуточного слоя и окружающий рельеф. Поправки называются редукциями. Основными из них являются: поправки на высоту, за притяжение промежуточного слоя, за рельеф.

Для приведения измеренного значения  $g_n$  к уровню океана вводят поправку за высоту ( $\Delta g$ ). Эту поправку называют поправкой за "свободный воздух" или поправкой Фая. Формула для расчета поправки за высоту имеет вид:  $\Delta g_1 = 0.3086 H$ , где  $\Delta g_1$  в миллигалах, а  $H$  (высота над уровнем моря) в метрах. Эта поправка должна прибавляться к измеренной силе тяжести, если точка наблюдений находится выше уровня геоида, и вычитаться, если ниже.

При введении поправки за притяжение промежуточного слоя ( $\Delta g_2$ ) вычисляется притяжение масс слоем между уровнем океана и данной точкой. Для расчета этой поправки используют формулу притяжения плоскопараллельной пластины, которая имеет вид:  $\Delta g_2 = -0,0419\sigma H$  НмГал, где  $H$  - абсолютная высота точки наблюдения в м, а  $\sigma$  - средняя плотность пород в этом слое в г/см<sup>3</sup>. Поправка имеет знак, противоположный знаку поправки за свободный воздух.

Для учета бокового притяжения рельефа местности, окружающего пункт наблюдения, при съемке в горных районах вводится топографические поправки ( $\Delta g_3$ ). Имеется несколько способов учета таких поправок, которые всегда положительны.

При региональных исследованиях суши и океанов иногда используются специально рассчитываемые изостатические редукции, которые характеризуют отклонение от существующего в целом гидростатического равновесия Земли. Считается, что в верхней оболочке, называемой литосферой мощностью 100–200 км, такое равновесие достигается в основном по средствам упругого изгиба.

Глубже, в так называемой астеносфере с более низкой вязкостью, равновесие достигается горизонтальными течениями. От этих факторов зависит гидростатическое равновесие. В ряде районов с интенсивными изостатическими аномалиями оно нарушено.

Аномалии силы тяжести рассчитываются по разным формулам. В геодезической гравиметрии под аномалией силы тяжести понимают разность между наблюдаемым значением ( $g_n$ ) и нормальным ( $\gamma_0$ ) с учетом поправки Фая, она рассчитывается по формуле  $\Delta g_\phi \approx g_n - \gamma_0 + \Delta g_1$  и называется аномалия Фая. Основной аномалией в гравиразведке является аномалия Буге:

$$\Delta g_B = g_n - \gamma_0 + \Delta g_1 + \Delta g_2 + \Delta g_3 = g_n - g_{\text{ТЕОР}},$$

в которую вводятся все поправки. Под  $g_{\text{ТЕОР}}$  понимается суммарная поправка в наблюдаемые значения, которая может быть определена до проведения работ, поскольку в ней имеются лишь топографические координаты точек наблюдения ( $\phi, H$ ). Ее рассчитывают с помощью ЭВМ.

Для постановки гравиразведки и особенно истолкования результатов необходимо знать плотность горных пород -  $\sigma$ , ибо это единственный физический параметр, на котором базируется гравиразведка.

Плотностью породы (или объемным весом) называется масса ( $m$ ) единицы объема породы ( $V$ )  $\sigma = m/V$ . Плотность измеряют в г/см<sup>3</sup>. Обычно плотность определяется для образцов, взятых из естественных обнаружений, скважин и горных выработок. Наиболее простым способом определения плотности образца является взвешивание образца в воздухе ( $m$ ), и в воде ( $m'$ ) и затем расчет  $\sigma$ . На этом принципе построен наиболее распространенный и простой прибор для измерения плотности - денситометр, позволяющий определять с точностью до 0,01 г/см<sup>3</sup>.

Для достоверности и представительности измерения следует производить на большом количестве образцов (до 50 штук). По многократным измерениям плотности образцов одного и того же литологического комплекса строятся вариационная кривая или график зависимости значений  $\sigma$  от количества образцов, обладающих данной плотностью. Максимум этой кривой характеризует наиболее вероятное значение плотности для данной породы. Существуют гравиметрические и другие геофизические способы полевых и скважинных определений плотности.

Плотность горных пород и руд зависит от химико-минералогического состава, т.е. объемной плотности твердых зерен, пористости и состава заполнителя пор (вода, растворы, нефть, газ). Плотность изверженных и метаморфических пород определяется в основном минералогическим составом и увеличивается при переходе от пород кислых к основным и ультраосновным. Для осадочных пород плотность определяется, прежде всего, пористостью, водонасыщенностью и в меньшей степени составом. Однако она сильно зависит от консолидации осадков, от их возраста и глубины залегания, с

увеличением которых она растет. Примеры плотности даны в таблице 1. [19, с. 26–37].

Таблица 1 - Значения плотностей для различного вида горных пород

Порода	Плотность (г/см <sup>3</sup> )
Нефть	0,8 - 1,0
Уголь	1,0
Вода	1,1 - 2
Почва	1,13 - 2,0
Песок	1,4 - 2
Глина	2 - 2,2
Песчаник	1,8–2,8
Известняк	2,3 - 3,0
Соль	2,1 - 2,4
Гранит	2,4–2,9
Гнейсы	2,6 - 2,9
Габбро	2,8 - 3,1
Базальт	2,7–3,3
Перидотит	2,8 - 3,4
Медный колчелан	4,1 - 4,3
Магнетит, гематит	4,9 - 5,2
Плотность верхних частей земной коры (средняя)	2,6
Средняя плотность Земли	5,52
Плотность ядра Земли	12
Природный газ	0,00085-0,00063

Вышеизложенный материал дает понимание об обратных задачах гравиметрии, понятии потенциала и градиента гравитационного поля. Многие моменты были описаны для общего понимания.

## 1.2 Математическая модель процесса

Как правило, в промысловых условиях при эксплуатации многопластовых залежей в разработку вводятся запасы нефти в наиболее продуктивной части пласта, поэтому часть их остается недостаточно изученной, хотя по объемам они бывают значительными. Для их изучения необходимо создание достоверной геологической модели залежи, по которой оцениваются структура и объемы ранее неизученных запасов.

Поиск новых запасов нефти и переход некоторых разрабатываемых объектов в категорию трудно извлекаемых создали необходимость повторного и более детального уточнения геологического строения вышеупомянутых объектов.

### 1.3 Постановка прямой задачи

Для начала рассмотрим строение земли в определенном сечении, т. е. в двумерных измерениях. На начальном этапе будем считать, что исследуемая область имеет однородную структуру и плотность везде одинаковая, и мы знаем значение этой плотности. Будем предполагать, что в заданной области имеется только одна неоднородность. Пусть это неоднородность имеет форму прямоугольника. Пусть мы знаем место расположение и форму неоднородности. Но мы не знаем плотность аномалии.

Пусть область  $\Omega$  имеет прямоугольную форму размером  $L \times M$  (рисунок 1). Неоднородность имеет форму прямоугольника  $\Omega_0$  и расположено в интервале  $x_m \leq x \leq x_n$  (длина на поверхности земли),  $y_k \leq y \leq y_l$  (глубина рассматриваемого разреза земли, причем положительное направление оси  $Oy$  направленно вниз, для того чтобы было удобно считать с положительными значениями  $y$ ). Основное уравнение гравитационного поля описывается следующей формулой:

$$\Delta \varphi = -4\pi G \rho,$$

где  $\varphi$  – это потенциал поля;

$G, \pi$  – константы;

$\rho$  – плотность вещества;

$\Delta$  – оператор Лапласа;

Обозначим через  $\Delta \varphi_0 = -4\rho_0\pi G$  потенциал гравитационного поля без неоднородности. Где  $\rho_0$  – это плотность рассматриваемой области без неоднородности.

Размер рассматриваемой области должен быть намного больше размера неоднородности для того, чтобы разность потенциалов на границе области была равна нулю. Потенциал на поверхности неоднородности имеет форму «шапки», и полностью покрывает неоднородность. Таким образом потенциал поля неоднородности распространяется за пределы границы неоднородности. Если на границе рассматриваемой области разность потенциалов не равна нулю, то мы искусственно расширяем исследуемую область, так чтобы размеры были достаточно большими по отношению к исследуемой неоднородности. Расширяться мы можем в глубину и в ширину. Верхняя часть земной границы остается неизменной. Расширяемую границу обозначим через  $\Gamma$ .

Таким образом, посчитаем разницу 
$$\begin{cases} \Delta \varphi(x, y) = -4\pi \rho(x, y)G \\ \Delta \varphi_0(x, y) = -4\pi \rho_0(x, y)G \end{cases}$$
 Получаем  $\Delta \eta(x, y) = -4\pi \psi(x, y)G$ , где 
$$\begin{cases} \eta(x, y) = \varphi(x, y) - \varphi_0(x, y) \\ \psi(x, y) = \rho(x, y) - \rho_0(x, y) \end{cases}$$
 Значение граничных условий по границе  $\Gamma$  равно нулю.

$$\eta(x, y)|_{\Gamma} = 0.$$

Следовательно, у нас получилось, что

$$\psi(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{вне } \Omega_0 \\ \psi_0, & \text{в } \Omega_0 \end{cases}.$$

Таким образом, мы свели исходную задачу с не нулевыми граничными условиями к эквивалентной задаче с нулевыми граничными условиями (этот метод сведения задачи называется методом возмущений). Что намного облегчает процесс решения поставленной задачи.

Теперь постановка имеет вид

$$\Delta \eta(x, y) = -4\pi G\psi(x, y), \quad (x, y) \in \Omega \quad (1.1)$$

$$\eta(x, y)|_{\Gamma} = 0, \text{ где } \Gamma - \text{ граница, без } \{y=0\} \quad (1.2)$$

$$\eta(x, y)|_{y=0} = \eta_1(x), \quad (1.3)$$

$$\frac{\partial \eta(x, y)}{\partial y} |_{y=0} = \eta_2(x), \quad (1.4)$$

$$\psi(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{вне } \Omega_0 \\ \psi_0, & \text{в } \Omega_0 \end{cases}. \quad (1.5)$$

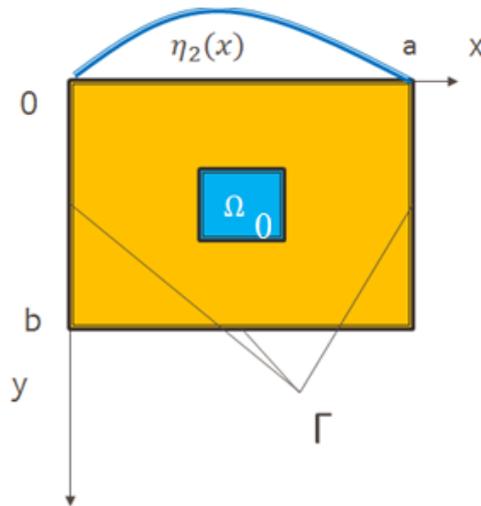


Рисунок 1 - Схематическое представление градиента гравитационного поля над подземной аномалией

Уравнения (1.1) - (1.3) является *прямой задачей* уравнения Пуассона с граничными условиями. Функция  $\eta(x, y)$  - потенциал гравитационного поля имеет второй порядок по каждой переменной. Следовательно, чтобы решить это уравнение в частных производных нам необходимы четыре граничных условия. Уравнения (1.2) и (1.3) обеспечивают нас четырьмя граничными условиями (по четырем границам). То есть, мы можем решить прямую задачу.

Найти потенциал поля в любой точке рассматриваемой области  $\Omega (L \times M)$ , с заданными граничными условиями.

#### **1.4 Описание алгоритма программного обеспечения для прямой задачи**

Постановка задача сводится к решению прямой и обратной задачи. На первом этапе мы должны хорошо изучить прямую задачу, проверяем на наличие отклонения и неточностей при различных расположениях аномалии внутри исследуемой области. Анализируем изменение плотности на верхнее значение гравитационного поля. Все расчеты производились на программном продукте Comsol Multiphysics 5.2. Это программный продукт содержит в себе все необходимые численные расчеты. Полученные решения основаны на методе конечных элементов. Этот метод является наиболее точным и универсальным. Преимущество Comsol Multiphysics 5.2 в скорости решения и предоставления визуального решения поставленной задачи. К сожалению, обратную задачу решить на Comsol Multiphysics 5.2 затруднительно, но для решения прямой задачи она достаточно хорошо подходит.

Результаты решения прямой задачи показали следующее. При различном расположении аномалии по области исследования верхняя граница гравитационного поля изменялась не так как ожидалось. А именно, если аномалия располагалась ближе к боковым границам (рисунки 2 и 5), то симметрия получаемой кривой сильно менялась, даже выгибалась (рисунки 3, 4, 6, 7). К тому же пик кривой не располагался в точности над центром аномалии, а смещался в сторону границ. Таким образом внося искажение и сложность для обратного восстановления месторасположения аномалии. Связано это было с нулевыми граничными условиями, которые мы наперед задали, недостаточно расширив область. То есть изначально мы не предполагали, что аномалия будет располагаться вблизи границы. Аномалия должна располагаться ближе к центру области. Иначе мы не можем опираться на результаты гравитационного поля, так как они дают сдвиги в разные стороны. Наибольшее искривление у боковых границ получается ближе к поверхности земли. То есть чем глубже аномалия, тем меньше искривление.

#### **1.5 Анализ результатов прямой задачи на модельных данных**

Допустим нам необходимо исследовать область размером 100 по горизонтали и 50 по вертикали. Искусственно расширим область вверх на 100, для того чтобы проанализировать, что произойдет на верхней границе  $y=50$ .

Аномалия имеет размерность 2 на 2 (размер 1 на 1 оказался слишком мелким, и не видным на рисунках). Будем изменять место положение аномалии по горизонтали по  $j=0, 10, 20, 30, 35, 40, 45$ . Достаточно будет менять месторасположение аномалии до середины исследуемой области, так как ранее мы убедились, что результаты получаются симметричными. Сдвиги по вертикали по  $i=5, 10, 15, 20, 30, 40, 50$ .

Аномалия «пробегает» слева на право (таблица 2) до середины области (в зависимости от  $j$  столбца). Аномалия «пробегает» снизу-вверх (таблица 3) до середины (из глубины на поверхность) области  $z=40$  (в зависимости от  $i$  строки).

Таблица 2 - Расположение аномалии по горизонтали на  $x=5$  ( $i=5$  строка)  $j=5$

$j$	$a$	$a_p$	$a_g$	$b_p$	$b_g$	$c_{pl}$	$c_{gl}$	$c_{pr}$	$c_{gr}$
0	5	19	20	0,04	-0,01	18,54	13,91	38,82	28,26
10	5	29	21	0,51	-0,02	19,43	15,18	40,67	29,96
20	5	32	26	0,88	-0,04	22,26	18,22	44,27	34,82
30	5	37	32	1,14	-0,04	26,72	23,88	49,78	42,13
35	5	40	37	1,22	-0,04	29,15	27,53	53,18	46,67
40	5	43	41	1,28	-0,05	31,97	31,97	56,27	51,35
45	5	47	46	1,31	-0,05	35,21	36,42	59,51	56,06

Таблица 3 - Расположение аномалии по вертикали на  $y=0$  ( $j=0$  столбец)  $i=0$

$i$	$a$	$a_p$	$a_g$	$b_p$	$b_g$	$c_{pl}$	$c_{gl}$	$c_{pr}$	$c_{gr}$
5	5	19	21	0,04	-0,002	18,54	13,91	38,82	28,26
10	10	26	19	0,09	-0,004	17,85	13	37,99	26,69
15	15	25	18	0,13	-0,007	16,95	12,11	36,25	24,83
20	20	23	15	0,19	-0,011	15,11	10,67	33,49	22,43
30	30	17	10	0,37	-0,028	10,89	7,26	25,83	15,28
40	40	9	5	0,86	-0,128	5,53	3,65	13,9	7,31

На рисунках 2 и 5 показаны распределение потенциала гравитационного поля на исследуемой области. На рисунках 3 и 6 показаны распределения потенциала гравитационного поля на поверхности Земли. На рисунках 4 и 7 показаны распределение градиента гравитационного поля на поверхности Земли. Расположение аномалии близко к краю исследуемой области дает искажение в значениях потенциала и градиента гравитационного поля на поверхности при решении прямой задачи. Следовательно, будет искажение и при решении обратной задачи в дальнейшем. Необходимо расширять исследуемую область таким образом, чтобы границы исследуемой области были как можно дальше от аномалии.

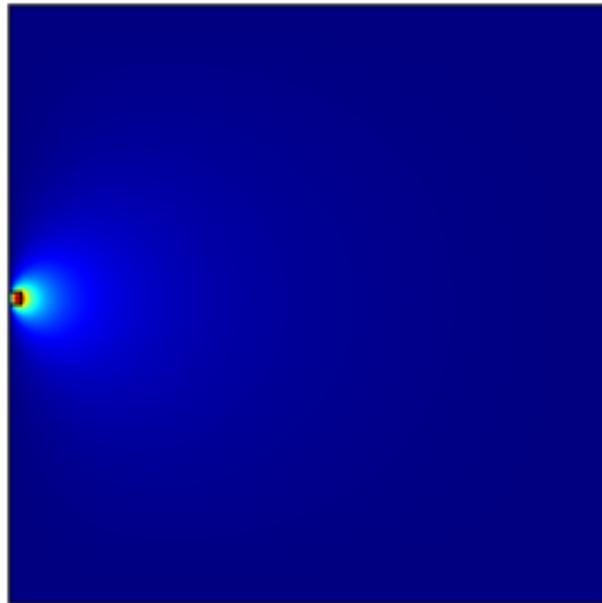


Рисунок 2 - Потенциал гравитационного поля при расположении (0;50)

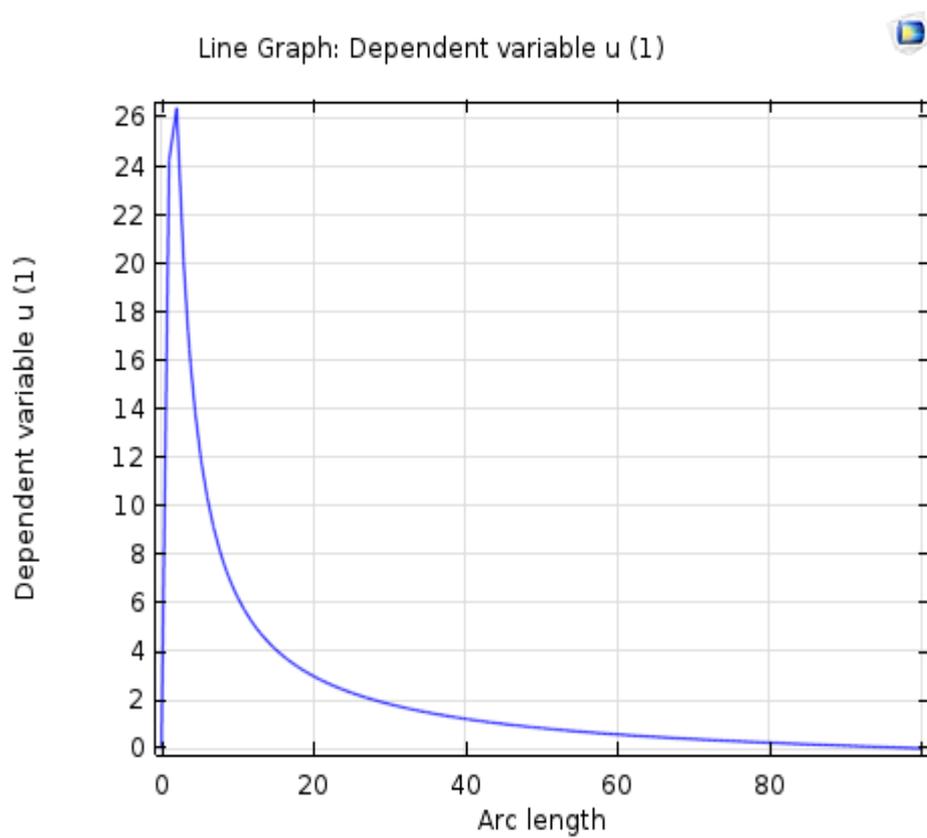


Рисунок 3 - Потенциал гравитационного поля на поверхности  $z=50$  при расположении (0;50)

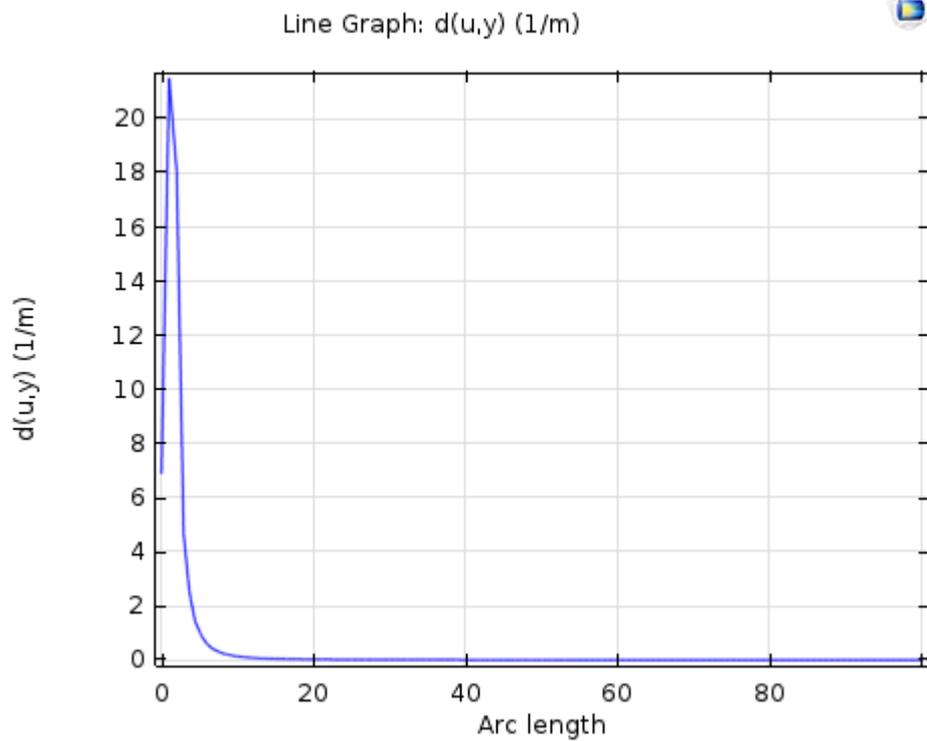


Рисунок 4 - Градиент потенциала гравитационного поля на поверхности  $z=50$  при расположении  $(0;50)$

Проверим расположение аномалии при  $(0;40)$ . Как видно из рисунков 5, 6, 7 при отдалении от границы все в порядке и градиент снова направлен вниз.

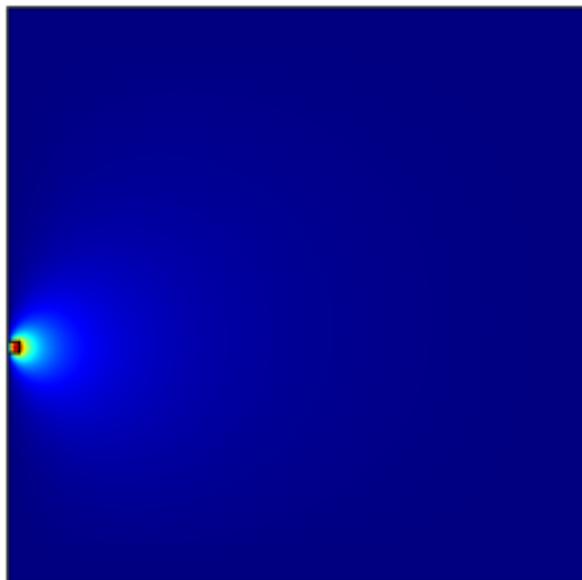


Рисунок 5 - Потенциал гравитационного поля при расположении  $(0;40)$

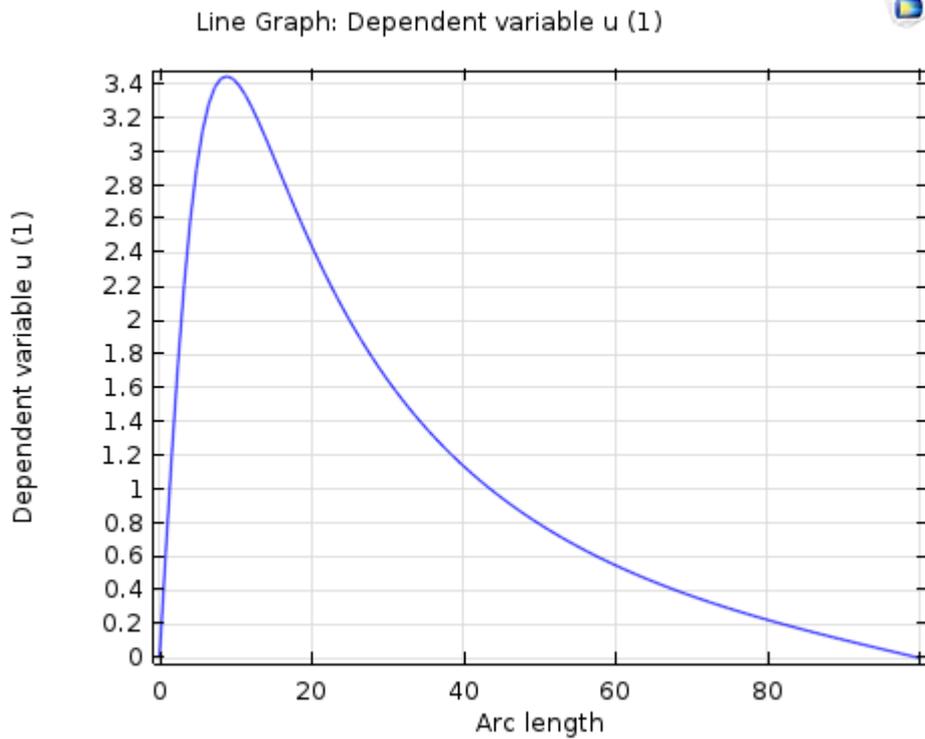


Рисунок 6 - Потенциал гравитационного поля на поверхности  $z=50$  при расположении (0;40)

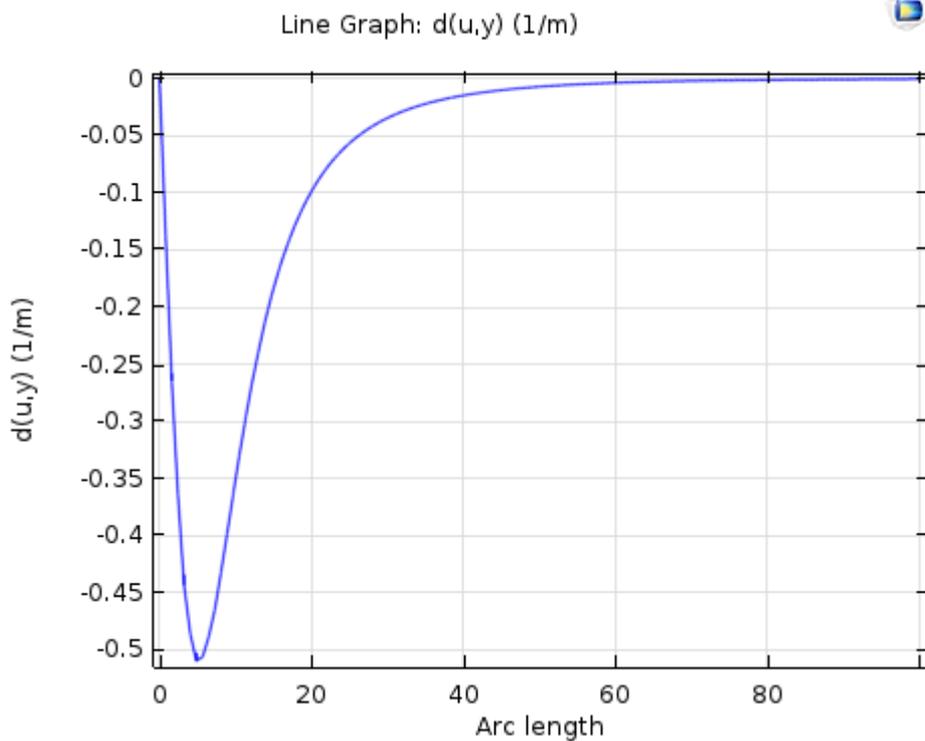


Рисунок 7 - Градиент потенциала гравитационного поля на поверхности  $z=50$  при расположении (0;40)

Аномалия будет располагаться в центре исследуемой области, то есть по координате  $x=45$  (или  $j=45$ ). Размер аномалии 2 на 2. Потом будем двигать

аномалию снизу-вверх (из глубины на поверхность). Посмотрим, как это повлияет на значение процентного отклонения. Аномалия «пробегают» снизу-вверх (таблица 4) до середины (из глубины на поверхность) области  $y=40$  (в зависимости от  $i$  строки).

Таблица 4 - Расположение аномалии по вертикали на  $y=45$  ( $j=45$  столбец)  $j=45$

$i$	$a$	$a_p$	$a_g$	$b_p$	$b_g$	$c_{pl}$	$c_{gl}$	$c_{pr}$	$c_{gr}$
5	5	47	46	1,31	-0,04	35,21	36,42	59,51	56,06
10	10	47	46	2,45	-0,08	35,17	36,72	59,35	55,64
15	15	46	46	3,68	-0,13	35,56	37,31	59,03	54,99
20	20	47	45	5,05	-0,18	36,01	37,96	58,2	54,12
30	30	46	46	8,59	-0,35	37,32	40,01	55,96	51,82
40	40	46	45	14,71	-0,84	40,34	43,05	52,17	49,01

## 1.6 Решение прямой задачи на реальных данных

В предыдущих разделах мы решали краевую задачу с абстрактными данными и абстрактной неоднородностью. В действительности грунт имеет достаточно сложную структуру, вследствие чего реальное распределение плотности может иметь любую форму. И мы хотим теперь установить распределение гравитационного поля на основе уже имеющейся модели, но с реальным распределением плотности. Его мы берем из натурного эксперимента (рисунок 8). Математическая часть остается без изменения, но возникает дополнительная задача – как ввести в нашу программу эту информацию. Для ввода информации о плотности распределения месторождения мы написали код программы «Converter», переводящий геолого-литологический профиль в цифровой формат удобный нам для дальнейших расчетов.

Результаты исследования этого раздела были получены при переходе наших расчетов к реальным данным. Прямую задачу с использованием геолого-литологических профилей реального нефтяного месторождения мы решили в полном объеме.

### 1.6.1 Постановка задачи

На рисунке 8 показан геолого-литологический профиль нефтяного месторождения. На рисунке коричневым цветом указаны залежи нефти, желтым – газа и голубым – воды. Вокруг полезных ископаемых – грунт белого цвета. Состав грунта зависит от глубины залегания месторождения. С левой стороны рисунка 8 показана шкала глубин в метрах. Вертикальные линии в виде стрелок – это пробуренные скважины. На макушках написаны номера скважин. Геолого-литологические профили имеют различные масштабы по горизонтали и по вертикали, которые нужно учитывать при реализации программы. Основным объектом исследования является получение матрицы распределения плотности в заданной области преобразовав геолого-

литологические профили. На рисунке задается распределение материалов по разрезу.

Нам требуется, имея геолого-литологические профили в виде начальной информации о плотности материалов, получить матрицу распределения плотности. Для этого необходимо наличие программы, реализующей это преобразование. Мы назвали эту программу «Converter». Программа должна быть легко интегрируема с другими частями глобальной программы и конечно отвечать последним требованиям научного сообщества.

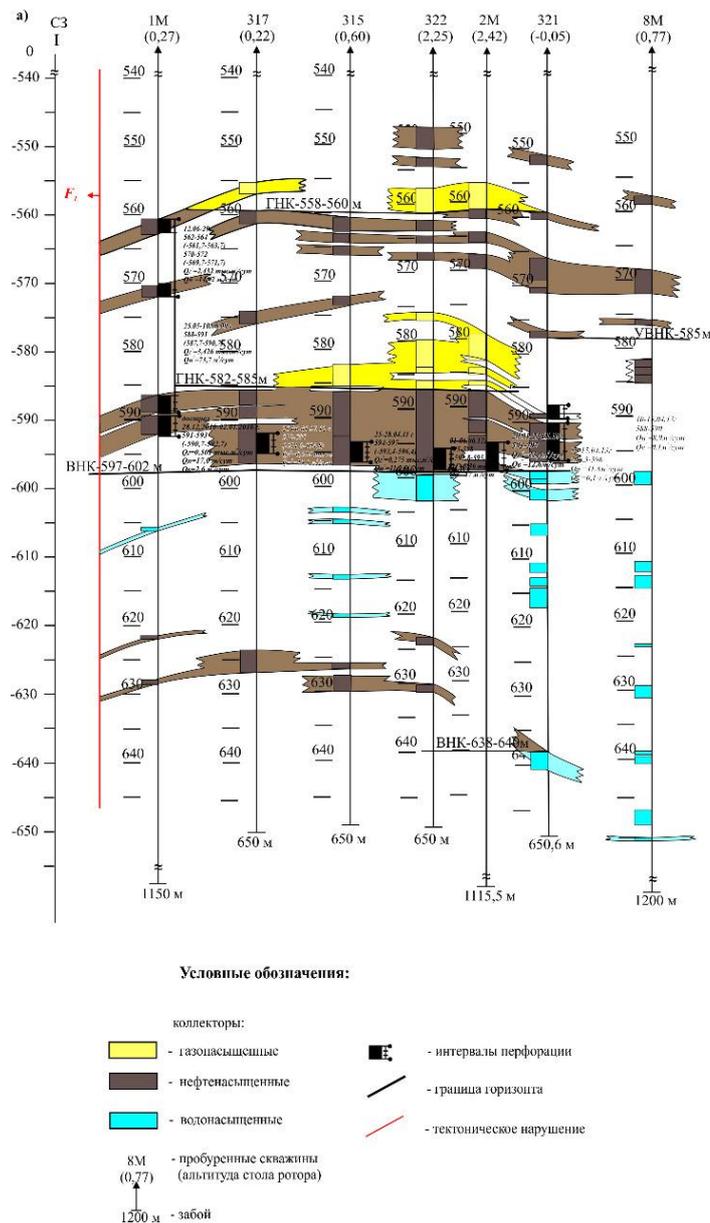


Рисунок 8 - Геолого-литологический профиль нефтяного месторождения

### 1.6.2 Методика исследования

Так как, Python – современный и довольно хороший выбор для системной интеграции в научных вычислениях. Все вычисления были проведены на языке

Python, являющемся объектно-ориентированным языком. Большим преимуществом интерпретируемого языка является то, что программы могут быть протестированы и быстро отлажены, что позволяет пользователю больше сосредоточиться на принципах программа и меньше на самом программировании. Поскольку нет необходимости компилировать, связывать и выполнять после каждого исправления, программы Python могут быть разработаны в более короткое время, чем эквивалентные программы на Фортране или Си. С отрицательной стороны интерпретируется программы не создают автономных приложений. Таким образом, программа на Python может быть работать только на компьютерах, на которых установлен интерпретатор Python. Python имеет богатую стандартную библиотеку и большое количество модулей расширения практически для всех нужд отрасли информационных технологий. В программе «Converter» были использованы библиотеки cv2 (библиотека по работе с графическими данными и пикселями), numpy (библиотека по работе с матрицами), pyplot (библиотека по построению графиков) и другие. Благодаря ясному синтаксису изучение языка не составляет большой проблемы. Написанные на нем программы получают структурированными по форме, и в них легко проследить логику работы.

### 1.6.3 Алгоритм программы «Converter»

Программа «Converter» работает по следующему алгоритму:

1. Для обработки изображений геолого-литографических профилей месторождений в цифровой формат на вход подается изображение. Программа берет рисунок геолого-литологического профиля, считывает его ширину и высоту в пикселях.

2. Делит количество пикселей на  $N$  частей, разбивая тем самым на небольшие прямоугольники исходную область пикселей.

3. В каждом маленьком прямоугольнике мы считаем расстояние цвета каждого пикселя от цветов в таблице плотностей на основе формулы Евклидоваго расстояния (в данном случае у нас только 4 цвета – синий, коричневый, желтый и белый).

4. И определив к какому из четырех цветов данный пиксель ближе, ведет счет количества каждого из четырех цветов в данном прямоугольнике. Так программа определяет сколько пикселей того или иного цвета (один из четырех цветов) содержится в маленьком прямоугольнике.

5. Программа определяет тот цвет, которого больше всего в данном маленьком прямоугольнике. И присваивает этому прямоугольнику тот цвет, которого там больше всего.

6. Программа проходит по всем маленьким прямоугольникам, присваивая каждому определенный цвет - номер ключа из словаря (коричневый, синий, желтый или белый).

7. Используя ключ цвета, запрашивается значение плотности, соответствующее этому цвету, и ячейка-прямоугольник присваивает это значение плотности.

8. Пробегая по всем прямоугольникам, получаем матрицу плотностей, являющейся цифровым форматом геолого-литологического профиля.

Заметим, что разбиение на N частей может быть сколь угодно большим. Это позволяет получать достаточно точные интерпретации в плоть до пикселей.

В языке программирования Python словари (тип dict) представляют собой еще одну разновидность структур данных наряду со списками и кортежами. Синтаксис словаря на Python описывается такой схемой:

{ключ: значение, ключ: значение, ключ: значение, ...}

Итак, каждый элемент словаря состоит из двух объектов: ключа и значения. В нашем примере ключом является название 0,1,2,3 и color, name, density, значением является (255, 255, 255), (153, 204, 255), (204,150, 102), (255, 255,0); Earth, Water, Oil, Gas; (2.1), (1.55), (0.9), (0.00085). Ключ идентифицирует элемент словаря, значение является данными, которые соответствуют данному ключу. Значения ключей – уникальны, двух одинаковых ключей в словаре быть не может.

Важная особенность OpenCV – представление изображения как многомерные массивы NumPy и сохранения изображений в цветах BGR. Для того чтобы вернуться к стандартному RGB, используем функцию cv2.COLOR\_BGR2RGB, переводящую BGR формат в формат RGB. Это было необходимо в связи с тем, что цвета пикселей были в формате RGB.

В итоге функция def converter\_pix\_to\_massiv возвращает матрицу плотностей геолого-литографических профилей месторождения (рисунок 9).

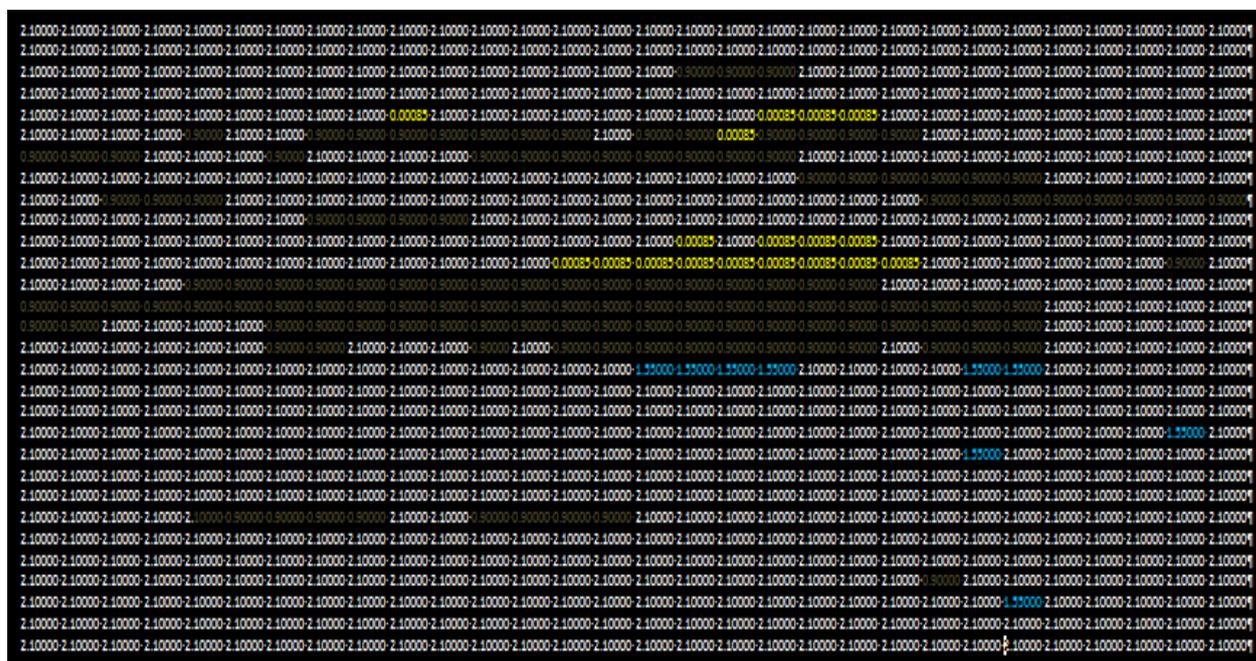


Рисунок 9 - Матрица плотностей геолого-литографических профилей месторождения

## Выводы по разделу 1

В первой главе мы рассмотрели физическую часть процесса прямых и обратных задач гравиметрии. Дали основные понятия аномалии, потенциала и градиента гравитационного поля. Построили математическую модель процесса. Дали алгоритм решения прямой задачи гравиметрии на модельных данных. Провели подробное исследование различных расположении аномалии в исследуемой области, нашли взаимосвязь между расположением аномалии и откликом потенциала и градиента гравитационного поля на это расположение. На основе полученной математической модели и анализа модельных данных была решена прямая задача на реальных данных, то есть использование геолого-литологического профиля в качестве плотности распределения аномалии и посчитана значение градиента гравитационного поля. Подробно описан алгоритм программы «Converter» - преобразователь геолого-литологического профиля в цифровой формат.

По результатам главы 1 по решению прямой задачи мною был сделан доклад и опубликован тезис на Международной конференции «Inverse Problems in Finance, Economics and Life Sciences» (КазНУ им. аль-Фараби, Алматы, Казахстан, декабрь 2017 г.) [2, с. 16], второй доклад и тезис опубликован на V Международной конференции «Фарабиевские чтения» (КазНУ им. аль-Фараби, Алматы, Казахстан, апрель 2018 г.) [4, с. 106].

Опубликованы 2 статьи ККСОН: Влияние подземной аномалии на гравитационное поле поверхности земли (Казахский национальный педагогический университет имени Абая, Вестник серия «Физико-математические науки». №3(63) 2018) [5, с. 269-274], вторая статья - Modeling of the potential of the gravitational field at the upper boundary of the region with the existence of a subterranean anomaly (International Journal of Mathematics and Physics 9, №1, 20 (2018)) [1, с. 20–26].

На основе исследования раздела 1.6 опубликовали статью Scopus: Images converter of geologic-lithographic profiles (News of the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan. Series of geology and technology sciences. 1(445) January – February 2021) [6, с. 121-126] и получили авторское свидетельство на разработанную нами программу «Converter» [16, с. 1]. А также был опубликован тезис: Development of a program for converting graphic information of geological and lithographic profiles into digital information (Традиционная международная апрельская математическая конференция в честь Дня работников науки Республики Казахстан посвященная 1150-летию Абу Насыр аль-Фараби и 75-летию Института математики и математического моделирования).

Разработанная программа «Converter» действительно преобразует геолого-литографический профиль нефтяного месторождения в цифровой формат в виде массива в среде Python. Полученные результаты будут в дальнейшем использоваться для решения основной прямой задачи, которая позволяет узнать распределение гравитационного поля, как если бы структура месторождения была бы именно такой, как указано в тех разрезах. А уже за счет мониторинга

месторождений и идентификации этой информации предполагается решать обратную задачу, чтобы узнать, какие изменения произошли в пласте по сравнению с тем распределением, которое получается в процессе решения прямой задачи на основе информации с разрезов. Тем самым, разработанная программа становится одним из ключевых элементов разработанной ГИС проекта AP05135158 «Development of geographic information system for solving the problem of gravimetric monitoring of the state of the subsoil of oil and gas regions of Kazakhstan based on highperformance computing in conditions of limited experimental data».

## 2 ЗАДАЧА ВОССТАНОВЛЕНИЯ ПЛОТНОСТИ ГРАВИТАЦИОННОЙ АНОМАЛИИ ПО РЕЗУЛЬТАТАМ ИЗМЕРЕНИЯ ГРАВИТАЦИОННОГО ПОЛЯ НА ВНЕШНЕЙ ПОВЕРХНОСТИ

Первая глава была полностью посвящена решению прямой задачи. Был сделан анализ положения аномалии на решение прямой задачи. А также решена прямая задача на реальных данных. Во второй главе приступаем к анализу обратной задачи гравиметрии для модельных параметров. Так как для решения обратной задачи требуется многократно решать прямую задачу, то выводы, полученные из первой главы, будут нам весьма полезны во второй главе.

Во второй главе приведены две постановки обратных задач, дано доказательство единственности решения обратных задач, а также вычислены градиенты минимизируемых функционалов и даны постановки сопряженных задач для дальнейшего применения градиентного метода при решении обратной задачи. Вычислены градиенты минимизируемых функционалов. В разделе 2.3 при численном решении уравнений используется метод Монте-Карло. Решение обратных задач проводится для различных значений параметров процесса.

### 2.1 Постановка обратной задачи

В процессе эксплуатации нефтяных месторождений мы можем использовать результаты геодинимического мониторинга для анализа текущей ситуации. Геодинимический мониторинг нефтяных месторождений производится ежегодно или один раз в два года. Результаты мониторинга нам дают значения потенциала и градиента гравитационного поля месторождения на текущий год. Так как ситуация плотностного распределения месторождения меняется в процессе выкачки нефти и других факторов, нам сложно оценить плотностное распределение нефтяного месторождения на текущий год. Но используя потенциал и градиент гравитационного поля месторождения, мы можем восстановить плотностную картину нефтяного месторождения. Восстановление плотности – это и есть решение обратной задачи гравиметрии для нефтяного месторождения.

Постановка обратной задачи формулируется следующим образом: *необходимо определить значение плотности аномалии  $\psi(x, y)$  в исследуемой области  $\Omega$  при известных значениях потенциала гравитационного поля  $\eta_1(x)$  и градиента гравитационного поля  $\eta_2(x)$  на отрезке НК – внешней поверхности (рисунок 10).*

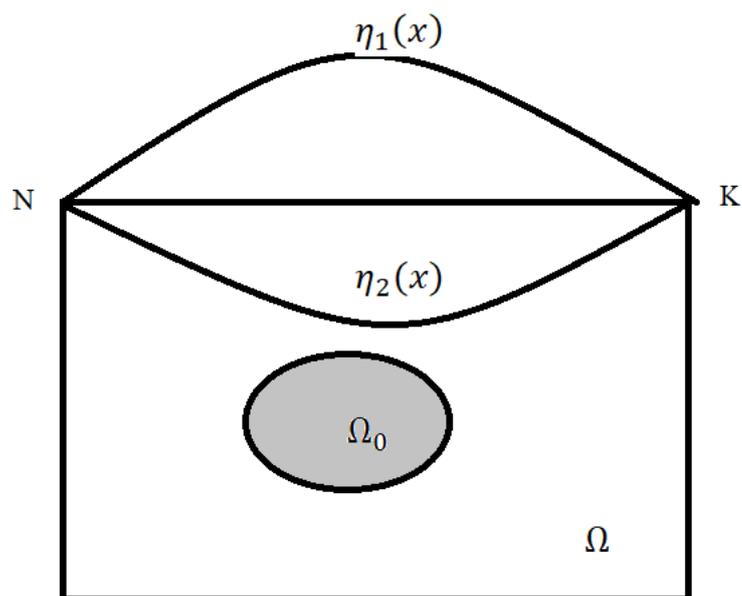


Рисунок 10 - Схематическое представление об исследуемой области, аномалии, потенциале и градиента гравитационного поля

Для решения обратной задачи необходимо заменить ее на оптимизационную задачу, поскольку методы оптимизации дают практический алгоритм. Одно из двух имеющихся условий можно интерпретировать как краевое условие для решения уравнения Пуассона, а другое – как информацию для восстановления неизвестной величины. Какое из условий как использовать? В принципе, не важно, они взаимозаменяемы. Отсюда вытекают две постановки оптимизационных задач.

Первая постановка обратной оптимизационной задачи:

Напомним, что прямая задача заключается в нахождении значения потенциала гравитационного поля на всей исследуемой области, при заданной некоторой плотности аномалии.

Уравнения (1.1) - (1.3) является прямой задачей уравнения Пуассона с граничными условиями. Функция  $\eta(x, y)$  – разность потенциалов гравитационных полей. Найти потенциал поля в любой точке рассматриваемой области, с заданными условиями на границе, при условии, что мы знаем значение  $\psi(x, y)$  - разность плотностей неоднородности и рассматриваемой области. Однако известно значение производной потенциала гравитационного поля (1.4).

В уравнение (1.1) подставляем значение  $\psi(x, y)$  из уравнения (1.5).  $\eta_1(x), \eta_2(x)$  – значения наблюдений гравиметрических показаний (потенциал гравитационного поля и его градиент).

Сведем обратную задачу к оптимизационной. Добавим функционал. Так как мы не знаем значение  $\psi_0$ , то мы будем его подбирать искусственно. Подбирать его нужно таким образом, чтобы при решении прямой задачи

полученный ответ  $\eta(x, y)$  при подстановке в уравнение (1.4) превращал его в тождество. Тогда подобранный  $\psi_0$  является решением обратной задачи. Но подобный метод трудоемкий, возможно даже не осуществимый, потому что подобрать  $\psi_0$  чрезвычайно сложно таким, чтобы точно «попасть» в  $\eta_2(x)$ . В таких случаях исходную задачу заменяют оптимизационной.

Оптимизационная задача получается следующим образом: вместо проверки условия (1.4), мы будем минимизировать функционал (2.1).

$$I(\psi_0) = \int_0^L \left( \left. \frac{\partial \widetilde{\eta(x,y)}}{\partial y} \right|_{y=0} - \eta_2(x) \right)^2 dx \rightarrow \min, \quad (2.1)$$

где  $L$  – это длина прямой линии (MN), на которой измерялись значения градиента гравитационного поля (т.е. длина поверхности земли).

Тое есть будем подбирать  $\psi_0$  таким образом, чтобы разница между нужным значение  $\left. \frac{\partial \widetilde{\eta(x,y)}}{\partial y} \right|_{y=0}$  и  $\eta_2(x)$  была минимальным.

Вторая постановка обратной оптимизационной задачи:

Теперь равенство (1.5) интерпретируется как граничное условие вместо (1.3). Пояснение: есть два условия при  $y = 0$ . Одно из них можно интерпретировать как граничное условие в дополнение к (1.2), а второе использовать при формулировке оптимизационной задачи. А которое куда – не важно. И то, и другое возможно. Во второй постановке обратной задачи условие (1.3) является дополнительным. Мы его используем для минимизации функционала (2.2). Все остальные формулы аналогично первой постановке.

$$I(\psi_0) = \int_0^L (\eta(x, y)|_{y=0} - \eta_1(x))^2 dx \rightarrow \min, \quad (2.2)$$

где  $L$  – это длина прямой линии (MN).

## 2.2 Единственность решения оптимизационной задачи

Итак, мы имеем две оптимизационные задачи, можно установить их свойства. Известно, что задача минимизации строго выпуклого функционала имеет не более одного решения [64].

*Теорема 1:*

*Функционал*

$$I(\psi_0) = \int_N^K \left( \left. \frac{\partial \eta(x, y)}{\partial y} \right|_{NK} - \eta_2(x) \right)^2 dx,$$

*является строго выпуклым, где  $\psi_0$  – разность плотностей аномалии и окружающей среды.*

*Доказательство:*

Возьмем уравнение потенциала гравитационного поля (1.1). В уравнении  $\eta(x, y)$  – потенциал гравитационного поля зависит от плотности  $\psi(x, y)$ .

*Этап 1.* Пере обозначим уравнение (1.1) в операторном виде:

$$A\eta(x, y) = C\psi(x, y).$$

Минимизируемый функционал (2.1) будет иметь вид:

$$I = \|B\eta(x, y) - \eta_2(x)\|^2, \text{ где } B - \text{это линейный оператор. Докажем это.}$$

Мы исследуем  $\psi(x, y) \rightarrow \eta(x, y)$ .

$$+ \begin{cases} A\eta_1(x, y) = C\psi_1(x, y) & | * \alpha \\ A\eta_2(x, y) = C\psi_2(x, y) & | * (1 - \alpha) \end{cases}$$

В итоге получаем

$$A(\alpha\eta_1(x, y) + (1 - \alpha)\eta_2(x, y)) = C(\alpha\psi_1(x, y) + (1 - \alpha)\psi_2(x, y)).$$

Пере обозначив через  $\eta_3(x, y) = \alpha\eta_1(x, y) + (1 - \alpha)\eta_2(x, y)$  и  $\psi_3(x, y) = \alpha\psi_1(x, y) + (1 - \alpha)\psi_2(x, y)$ , получаем  $A\eta_3(x, y) = C\psi_3(x, y)$ .

$$\eta(\alpha\psi_1(x, y) + (1 - \alpha)\psi_2(x, y)) = \alpha\eta(\psi_1(x, y)) + (1 - \alpha)\eta(\psi_2(x, y)). \quad (2.3)$$

Продифференцируем по  $y$  выражение (2.3) и получим выражение:

$$\frac{\eta(\alpha\psi_1(x, y) + (1 - \alpha)\psi_2(x, y))}{\partial y} = \alpha \frac{\eta(\psi_1(x, y))}{\partial y} + (1 - \alpha) \frac{\eta(\psi_2(x, y))}{\partial y}.$$

Следовательно,  $\psi(x, y) \rightarrow \frac{\eta(x, y)}{\partial y}$  отображение является аффинным.

*Этап 2.* Докажем строгую выпуклость операции возведения в квадрат. Возьмем функцию вида:

$$I(\psi) = \|B\eta(x, y) - \eta_2(x)\|^2.$$

Используя уравнение (2.3), получим:

$$\begin{aligned} I(\alpha\psi_1(x, y) + (1 - \alpha)\psi_2(x, y)) &= \|B\eta(\alpha\psi_1(x, y) + (1 - \alpha)\psi_2(x, y)) - \eta_2(x)\|^2 = \\ &= \|B(\alpha\eta_1(x, y) + (1 - \alpha)\eta_2(x, y)) - \eta_2(x)\|^2 = \\ &= \|\alpha B\eta_1(x, y) + (1 - \alpha)B\eta_2(x, y) - \eta_2(x)\|^2 = \\ &= \|\alpha(B\eta_1(x, y) - \eta_2(x)) + (1 - \alpha)(B\eta_2(x, y) - \eta_2(x))\|^2 = \\ &< \alpha\|B\eta_1(x, y) - \eta_2(x)\|^2 + (1 - \alpha)\|B\eta_2(x, y) - \eta_2(x)\|^2 = \\ &= \alpha I(\Psi_1) + (1 - \alpha)I(\Psi_2). \end{aligned}$$

В итоге получили неравенство (2.4), что и требовалось доказать.

$$I(\alpha\psi_1(x, y) + (1 - \alpha)\psi_2(x, y)) < \alpha I(\Psi_1) + (1 - \alpha)I(\Psi_2). \quad (2.4)$$

Этап 3. И последнее осталось доказать, что операция интегрирования, тоже строго выпуклая функция. Возьмем функционал вида:

$$I(\psi) = \int_N^K \|B\eta(x, y) - \eta_2(x)\|^2 dx.$$

Аналогично этапу 2 получим:

$$\begin{aligned} I(\alpha\psi_1(x, y) + (1 - \alpha)\psi_2(x, y)) &= \\ &= \int_N^K \|B\eta(\alpha\psi_1(x, y) + (1 - \alpha)\psi_2(x, y)) - \eta_2(x)\|^2 dx = \\ &= \int_N^K \|B(\alpha\eta_1(x, y) + (1 - \alpha)\eta_2(x, y)) - \eta_2(x)\|^2 dx = \\ &= \int_N^K \|\alpha B\eta_1(x, y) + (1 - \alpha)B\eta_2(x, y) - \eta_2(x)\|^2 dx = \\ &= \int_N^K \|\alpha B\eta_1(x, y) - \alpha\eta_2(x) + (1 - \alpha)B\eta_2(x, y) - (1 - \alpha)\eta_2(x)\|^2 dx = \\ &= \int_N^K \|\alpha(B\eta_1(x, y) - \eta_2(x)) + (1 - \alpha)(B\eta_2(x, y) - \eta_2(x))\|^2 dx < \\ &< \alpha \int_N^K \|B\eta_1(x, y) - \eta_2(x)\|^2 dx + (1 - \alpha) \int_N^K \|B\eta_2(x, y) - \eta_2(x)\|^2 dx = \\ &= \alpha I(\Psi_1) + (1 - \alpha)I(\Psi_2), \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

Следовательно, функционал (2.1) строго выпуклый. Из доказанного утверждения следует единственность решения задачи, то есть следующий результат:

*Теорема 2. Функционал (2.1) имеет не более одной точки минимума.*

Докажем строгую выпуклость функционала (2.1) оптимизационной задачи. Если функционал строго выпуклый, то решение единственно.

Итак, возьмем функционал (2.1) и докажем его строгую выпуклость.

$$I: U \rightarrow R, \psi_0 \in U$$

Возьмем любые  $u \neq v \in U$  и  $\alpha \in (0; 1)$ . Пусть  $\omega = \alpha u + (1 - \alpha)v$ . Докажем  $I(\alpha u + (1 - \alpha)v) < \alpha I(u) + (1 - \alpha)I(v)$ ,  $\forall u, v \in U$ ,  $\forall \alpha \in (0; 1)$ .

*Доказательство:*

$$\Delta \eta(x, y) = -4\pi\psi(x, y)G,$$

$\|\omega\| = \|\alpha u + (1 - \alpha)v\| \leq \alpha\|u\| + (1 - \alpha)\|v\|$ , по правилу треугольника для норм. И причем равенство выполняется только при  $\alpha = 0$  или  $\alpha = 1$ . Так как мы априори взяли интервал  $\alpha \in (0; 1)$ , выполнено условие

$$\|\alpha u + (1 - \alpha)v\| < \alpha\|u\| + (1 - \alpha)\|v\|.$$

По условию (2.1) получаем условие выпуклости функционала:

$$I(\alpha u + (1 - \alpha)v) < \alpha I(u) + (1 - \alpha)I(v),$$

что и требовалось доказать.

Теперь докажем единственность. Доказательство от обратного. Допустим существуют разные  $u \neq v \in U$ , такие что  $I(u) = I(v) = \min I(U)$ . В силу строгой выпуклости функционала имеет место выражение

$$I\left(\frac{1}{2}u + \frac{1}{2}v\right) < \frac{1}{2}I(u) + \frac{1}{2}I(v) = \min I(U).$$

То есть появилось  $U = \frac{1}{2}u + \frac{1}{2}v$  меньше минимума функционала, чего быть не может, так как меньше минимума не существует. Следовательно, наше предположение о существовании двух минимумов не верно. Отсюда минимум только один. Единственность тем самым доказана. Теорема доказана.

*Теорема 3. Функционал (2.2) имеет не более одной точки минимума. Доказательство проводится так же, как и для Теоремы 2.*

### 2.3 Вычисление производной функционалов

Для минимизации имеющихся функционалов мы будем использовать градиентные методы [65]. Эти методы является классическим и алгоритмы их хорошо сходятся, доказаны все необходимые теоретические теоремы. Таким образом, результаты решения удовлетворяют необходимым критериям оптимальности. Градиентный метод подразумевает использование производной функционала. Необходимо вычислить производные функционалов. Воспользуемся определением производной Гато для функционалов. Производная Гато обладает достаточным набором свойств, для того чтобы использовать ее в градиентном методе при расчете обратной задачи гравиметрии для модельной постановки.

#### 2.3.1 Обратная задача №1

*Теорема 4:*

*Производная функционала (2.1) в точке  $\psi_0$  определяется по формуле*

$$I'(\psi_0) = 4\pi G \iint_{\Omega} p(x, y) dx dy, \quad (2.5)$$

где  $p(x, y)$  есть решение сопряженной системы:

$$\Delta p(x, y) = 0, \quad (2.6)$$

$$p(x, M) = 0, \quad (2.7)$$

$$p(0, y) = 0, \quad (2.8)$$

$$p(L, y) = 0, \quad (2.9)$$

$$p(x, 0) = 2 \left( \left. \frac{\partial \widetilde{\eta(x, y)}}{\partial y} \right|_{y=0} - \eta_2(x) \right). \quad (2.10)$$

Вычислим градиент функционала, если он существует. Воспользуемся определением производной Гато:

$$(I'(\psi_0), h) = \lim_{\sigma \rightarrow 0} \left( \frac{I(\psi_0 + \sigma h) - I(\psi_0)}{\sigma} \right).$$

Так как функционал связан с плотностью  $\psi_0$  через уравнение состояния потенциала поля (1.1), то введем дополнительные обозначения.

Пусть плотность  $\psi_0$  переводит потенциал поля (1.1) в  $v(x, y)$ , а плотность  $\psi_0 + \sigma h$  переводит потенциал поля (1.1) в  $q(x, y)$ , то есть

$$\begin{aligned} \psi_0 &\rightarrow v(x, y), \\ \psi_0 + \sigma h &\rightarrow q(x, y). \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} I(\psi_0) &= \int_0^L \left( \frac{\partial v(x, 0)}{\partial y} - \eta_2(x) \right)^2 dx, \\ I(\psi_0 + \sigma h) &= \int_0^L \left( \frac{\partial q(x, 0)}{\partial y} - \eta_2(x) \right)^2 dx, \\ I(\psi_0 + \sigma h) - I(\psi_0) &= \int_0^L \left[ \left( \frac{\partial q(x, 0)}{\partial y} - \eta_2(x) \right)^2 - \left( \frac{\partial v(x, 0)}{\partial y} - \eta_2(x) \right)^2 \right] dx = \\ &= \int_0^L \left( \frac{\partial q(x, 0)}{\partial y} + \frac{\partial v(x, 0)}{\partial y} - 2\eta_2(x) \right) \left( \frac{\partial q(x, 0)}{\partial y} - \frac{\partial v(x, 0)}{\partial y} \right) dx = \\ \text{Обозначим: } &\begin{cases} q(x, y) - v(x, y) = \eta(x, y), \\ q(x, y) = v(x, y) + \eta(x, y), \end{cases} \text{ тогда } \frac{\partial \eta(x, 0)}{\partial y} = \frac{\partial q(x, 0)}{\partial y} - \frac{\partial v(x, 0)}{\partial y}, \\ &\frac{\partial q(x, 0)}{\partial y} = \frac{\partial v(x, 0)}{\partial y} + \frac{\partial \eta(x, 0)}{\partial y}; \\ &= \int_0^L 2 \left( \frac{\partial v(x, 0)}{\partial y} - \eta_2(x) \right) \frac{\partial \eta(x, 0)}{\partial y} dx + \int_0^L \left( \frac{\partial \eta(x, 0)}{\partial y} \right)^2 dx. \end{aligned}$$

В итоге получилось:

$$I(\psi_0 + \sigma h) - I(\psi_0) = \int_0^L 2 \left( \frac{\partial v(x,0)}{\partial y} - \eta_2(x) \right) \frac{\partial \eta(x,0)}{\partial y} dx + \int_0^L \left( \frac{\partial \eta(x,0)}{\partial y} \right)^2 dx. \quad (2.11)$$

Далее мы должны посчитать  $(I'(\psi_0), h) = \lim_{\sigma \rightarrow 0} \frac{I(\psi_0 + \sigma h) - I(\psi_0)}{\sigma}$ , но уравнение (2.11) не зависит от  $\sigma$  явным образом.  $\sigma$  связано с уравнением (2.11) через уравнение состояние системы (1.1) (для нашей постановки задачи — это потенциал гравитационного поля).

Мы уже ранее вводили обозначение

$$\begin{aligned} \psi_0 &\rightarrow v(x, y), \\ \psi_0 + \sigma h &\rightarrow q(x, y). \end{aligned}$$

Это значит, плотности  $\psi_0$  соответствует потенциал гравитационного поля, описываемый функцией  $v(x, y)$ . Аналогично для плотности поля  $\psi_0 + \sigma h$  соответствует поля потенциалом  $q(x, y)$ .

Распишем постановку задачи (1.1) -(1.5) через две функции  $q(x, y)$  и  $v(x, y)$ .

$$\begin{aligned} \Delta v(x, y) &= -4\pi\psi(\psi_0)G, & \Delta q(x, y) &= -4\pi\psi(\psi_0 + \sigma h)G, \\ v(x, y)|_{\Gamma} &= 0, & q(x, y)|_{\Gamma} &= 0, \\ v(x, y)|_{y=0} &= \eta_1(x), & q(x, y)|_{y=0} &= \eta_1(x), \\ \psi(\psi_0) &= \begin{cases} 0, & \text{вне } \Omega_0 \\ \psi_0, & \text{в } \Omega_0 \end{cases} & \psi(\psi_0 + \sigma h) &= \begin{cases} 0, & \text{вне } \Omega_0 \\ \psi_0 + \sigma h, & \text{в } \Omega_0 \end{cases} \end{aligned}$$

Теперь отнимем эти два уравнения друг от друга и введем обозначение  $\eta(x, y) = q(x, y) - v(x, y)$ . Тогда уравнение примет вид:

$$\Delta \eta(x, y) = -4\pi G [\psi(\psi_0 + \sigma h) - \psi(\psi_0)].$$

Обозначим  $[\psi(\psi_0 + \sigma h) - \psi(\psi_0)] = \tilde{\psi}$ , тогда

$$\Delta \eta(x, y) = -4\pi G \tilde{\psi}. \quad (2.12)$$

$\eta(x, y)|_{\Gamma + \{y=0\}} = 0$ , где  $\Gamma + \{y=0\}$  граница всей исследуемой области

$$\tilde{\psi} = \begin{cases} 0, & \text{вне } \Omega_0 \\ \sigma h, & \text{в } \Omega_0 \end{cases}$$

Уравнение (2.12) искусственно умножаем на  $\lambda$  ( $\lambda$ -любое). И интегрируем по всей исследуемой области.

$$\begin{aligned}
& \iint_{00}^{LM} \lambda(x, y) \frac{\partial^2 \eta(x, y)}{dx^2} dx dy \\
& + \iint_{00}^{LM} \lambda(x, y) \frac{\partial^2 \eta(x, y)}{dy^2} dx dy = -4\pi G \iint_{00}^{LM} \tilde{\psi} \lambda(x, y) dx dy = \\
& = -4\pi G \sigma h \iint_{00}^{LM} \lambda(x, y) dx dy. \tag{2.13}
\end{aligned}$$

Первый двойной интеграл в уравнений (2.13) обозначим через  $I_1$  и проинтегрируем по частям два раза.

$$\begin{aligned}
I_1 &= \iint_{00}^{LM} \lambda(x, y) \frac{\partial^2 \eta(x, y)}{dx^2} dx dy = \\
&= \int_0^M \left( \lambda(x, y) \frac{\partial \eta(x, y)}{dx} \Big|_0^L - \int_0^L \frac{\partial \eta(x, y)}{\partial x} \frac{\partial \lambda(x, y)}{\partial x} dx \right) dy = \\
&= \int_0^M \left( \lambda(x, y) \frac{\partial \eta(x, y)}{\partial x} \Big|_0^L - \frac{\partial \lambda(x, y)}{\partial x} \eta(x, y) \Big|_0^L + \int_0^L \eta(x, y) \frac{\partial^2 \lambda(x, y)}{\partial x^2} dx \right) dy.
\end{aligned}$$

Это слагаемое  $\frac{\partial \lambda(x, y)}{\partial x} \eta(x, y) \Big|_0^L$  равно нулю, так как на границе области  $\eta$  равно нулю. Тогда

$$I_1 = \int_0^M \left( \lambda(x, y) \frac{\partial \eta(x, y)}{\partial x} \Big|_0^L + \int_0^L \eta(x, y) \frac{\partial^2 \lambda(x, y)}{\partial x^2} dx \right) dy.$$

Аналогично второй двойной интеграл в уравнений (2.13) обозначим через  $I_2$  и проинтегрируем по частям два раза.

$$\begin{aligned}
I_2 &= \iint_{00}^{LM} \lambda(x, y) \frac{\partial^2 \eta(x, y)}{dy^2} dx dy = \\
&= \int_0^L \left( \lambda(x, y) \frac{\partial \eta(x, y)}{dy} \Big|_0^M - \int_0^M \frac{\partial \eta(x, y)}{\partial y} \frac{\partial \lambda(x, y)}{\partial y} dy \right) dx = \\
&= \int_0^L \left( \lambda(x, y) \frac{\partial \eta(x, y)}{\partial y} \Big|_0^M - \frac{\partial \lambda(x, y)}{\partial y} \eta(x, y) \Big|_0^M + \int_0^M \eta(x, y) \frac{\partial^2 \lambda(x, y)}{\partial y^2} dy \right) dx.
\end{aligned}$$

Это слагаемое  $\frac{\partial \lambda(x, y)}{\partial y} \eta(x, y) \Big|_0^M$  равно нулю, так как на границе области  $\eta$  равно нулю. Тогда

$$I_2 = \int_0^L \left( \lambda(x, y) \frac{\partial \eta(x, y)}{\partial y} \Big|_0^M + \int_0^M \eta(x, y) \frac{\partial^2 \lambda(x, y)}{\partial y^2} dy \right) dx.$$

Найденные  $I_1, I_2$  подставим в уравнение (2.13), получим:

$$\begin{aligned} & \iint_{00}^{LM} \eta(x, y) \Delta \lambda(x, y) dx dy \\ & + \int_0^L \lambda(x, y) \frac{\partial \eta(x, y)}{\partial y} \Big|_{y=M} dx \\ & - \int_0^L \lambda(x, y) \frac{\partial \eta(x, y)}{\partial y} \Big|_{y=0} dx + \int_0^M \lambda(x, y) \frac{\partial \eta(x, y)}{\partial x} \Big|_0^L dy = \\ & = -4\pi G \sigma h \iint_{\Omega} \lambda(x, y) dx dy, \quad \forall \lambda \end{aligned} \quad (2.14)$$

Наша цель заключалась в выявлении  $\sigma$  явным образом из уравнения (2.11), что бы в дальнейшем разделить его на  $\sigma$  и перейти к пределу, таким образом получив производную Гаусса. В уравнении (2.14)  $\sigma$  выявлена явным образом. В связи с этим необходимо как-то связать уравнение (2.14) и (2.11).

Так как  $\lambda$  любое, мы можем его подобрать в качестве решения уравнения (2.11). Внимательно посмотрев на эти уравнения, замечаем, что

$$\int_0^L \lambda(x, y) \frac{\partial \eta(x, y)}{\partial y} \Big|_{y=0} dx = \int_0^L 2 \left( \frac{\partial v(x, 0)}{\partial y} - \eta_2(x) \right) \frac{\partial \eta(x, 0)}{\partial y} dx.$$

Что бы выполнялось это равенство нужно чтобы

$$\lambda(x, y) = 2 \left( \frac{\partial v(x, 0)}{\partial y} - \eta_2(x) \right).$$

Давайте тогда лямбда выберем именно  $\lambda(x, y) = 2 \left( \frac{\partial v(x, 0)}{\partial y} - \eta_2(x) \right)$ , но предварительно  $\lambda(x, y)$  переобозначив через  $\lambda(x, y) = p(x, y)$ . Следовательно

$$p(x, 0) = 2 \left( \frac{\partial v(x, 0)}{\partial y} - \eta_2(x) \right).$$

Теперь уравнение (2.14) пытаемся максимально упростить и обнулить все лишнее. Пусть (не забывая переобозначить лямбда через  $p(x, y)$ ).

$$\begin{aligned} \Delta p(x, y) &= 0, \\ p(x, M) &= 0, \\ p(0, y) &= 0, \\ p(L, y) &= 0, \\ p(x, 0) &= 2 \left( \frac{\partial v(x, 0)}{\partial y} - \eta_2(x) \right). \end{aligned}$$

Таким образом, мы получили сопряженную задачу (уравнение Лапласа с четырьмя граничными условиями, которое имеет прекрасное решение). Решим эту сопряженную задачу. Найдем  $p(x, y)$ . Тогда вычислим производную Гато:

$$I(\psi_0 + \sigma h) - I(\psi_0) = 4\pi G \sigma h \iint_{\Omega} p(x, y) dx dy + \int_0^L \left( \frac{\partial \eta(x, 0)}{\partial y} \right)^2 dx.$$

Делим на  $\sigma$  и переходим к пределу при  $\sigma$  стремящемся к нулю

$$(I'(\psi_0), h) = \lim_{\sigma \rightarrow 0} \left( \frac{I(\psi_0 + \sigma h) - I(\psi_0)}{\sigma} \right) = 4\pi G \iint_{\Omega} p(x, y) dx dy * h.$$

Следовательно, производная Гато равно:

$$I'(\psi_0) = 4\pi G \iint_{\Omega} p(x, y) dx dy.$$

*Замечание:*

Это слагаемое  $\int_0^L \left( \frac{\partial \eta(x, 0)}{\partial y} \right)^2 dx$  равно нулю (при делении на  $\sigma$  и перехода к пределу при  $\sigma$  стремящемся к нулю), так как интеграл второй степени и  $\sigma$  выходит в квадрате из-под интеграла и при делении на  $\sigma$ , одно  $\sigma$  остается. За счет того, что  $\sigma$  стремиться к нулю, все это выражение будет стремиться к нулю.

Далее используем градиентный метод для минимизации функционала.

$$\psi_{n+1} = \psi_n - \alpha_n I'(\psi_n). \quad (2.15)$$

### 2.3.2 Обратная задача №2

*Теорема 5:*

*Производная функционала (2.2) в точке  $\psi_0$  определяется по формуле*

$$I'(\psi_0) = -4\pi G \iint_{\Omega} p(x, y) dx dy, \quad (2.16)$$

где  $p(x, y)$  есть решение сопряженной системы:

$$\Delta p(x, y) = 0, \quad (2.17)$$

$$p(x, M) = 0, \quad (2.18)$$

$$p(0, y) = 0, \quad (2.19)$$

$$p(L, y) = 0, \quad (2.20)$$

$$\frac{\partial p(x, 0)}{\partial y} = 2(\eta(x, y)|_{y=0} - \eta_1(x)). \quad (2.21)$$

Аналогично выведем производную Гато для обратной задачи №2.

Вычислим градиент функционала, если он существует. Воспользуемся определением производной Гато:

$$(I'(\psi_0), h) = \lim_{\sigma \rightarrow 0} \left( \frac{I(\psi_0 + \sigma h) - I(\psi_0)}{\sigma} \right).$$

Так как функционал связан с плотностью  $\psi_0$  через уравнение состояния потенциала поля (1.1), то введем дополнительные обозначения.

Пусть плотность  $\psi_0$  переводит потенциал поля (1.1) в  $v$ , а плотность  $\psi_0 + \sigma h$  переводит потенциал поля (1.1) в  $q$ , то есть

$$\begin{aligned} \psi_0 &\rightarrow v, \\ \psi_0 + \sigma h &\rightarrow q. \end{aligned}$$

Тогда

$$I(\psi_0) = \int_0^L (v(x, 0) - \eta_1(x))^2 dx,$$

$$I(\psi_0 + \sigma h) = \int_0^L (q(x, 0) - \eta_1(x))^2 dx,$$

$$\begin{aligned} I(\psi_0 + \sigma h) - I(\psi_0) &= \int_0^L [(q(x, 0) - \eta_1(x))^2 - (v(x, 0) - \eta_1(x))^2] dx = \\ &= \int_0^L (q(x, 0) + v(x, 0) - 2\eta_1(x))(q(x, 0) - v(x, 0)) dx = \end{aligned}$$

Обозначим:  $\begin{cases} q - v = \eta; \\ q = v + \eta; \end{cases}$

$$= \int_0^L 2(v(x, 0) - \eta_1(x))\eta(x, 0) dx + \int_0^L (\eta(x, 0))^2 dx.$$

В итоге получилось:

$$I(\psi_0 + \sigma h) - I(\psi_0) = \int_0^L 2(v(x, 0) - \eta_1(x))\eta(x, 0)dx + \int_0^L (\eta(x, 0))^2 dx. \quad (2.22)$$

Далее мы должны посчитать  $(I'(\psi_0), h) = \lim_{\sigma \rightarrow 0} \frac{I(\psi_0 + \sigma h) - I(\psi_0)}{\sigma}$ , но уравнение (2.22) не зависит от  $\sigma$  явным образом.  $\sigma$  связано с уравнением (2.22) через уравнение состояния системы (1.1) (для нашей постановки задачи — это потенциал гравитационного поля).

Мы уже ранее вводили обозначение

$$\begin{aligned} \psi_0 &\rightarrow v, \\ \psi_0 + \sigma h &\rightarrow q. \end{aligned}$$

Это значит, плотности  $\psi_0$  соответствует потенциал гравитационного поля, описываемый функцией  $v$ . Аналогично для плотности поля  $\psi_0 + \sigma h$  соответствует поля потенциалом  $q$ .

Распишем постановку задачи (1.1)-(1.5) через две функции  $q$  и  $v$ .

$$\begin{aligned} \Delta v(x, y) &= -4\pi G\psi(\psi_0), & \Delta q(x, y) &= -4\pi G\psi(\psi_0 + \sigma h), \\ v(x, y)|_{\Gamma} &= 0, & q(x, y)|_{\Gamma} &= 0, \\ \frac{\partial v(x, y)}{\partial y} \Big|_{y=0} &= \eta_2(x), & \frac{\partial q(x, y)}{\partial y} \Big|_{y=0} &= \eta_2(x), \\ \psi(\psi_0) &= \begin{cases} 0, & \text{вне } \Omega_0 \\ \psi_0, & \text{в } \Omega_0 \end{cases} & \psi(\psi_0 + \sigma h) &= \begin{cases} 0, & \text{вне } \Omega_0 \\ \psi_0 + \sigma h, & \text{в } \Omega_0 \end{cases} \end{aligned}$$

Теперь отнимем эти два уравнения друг от друга и введем обозначение  $\eta = q - v$ . Тогда уравнение примет вид:

$$\Delta \eta = -4\pi G [\psi(\psi_0 + \sigma h) - \psi(\psi_0)].$$

Обозначим  $[\psi(\psi_0 + \sigma h) - \psi(\psi_0)] = \tilde{\psi}$ , тогда

$$\begin{aligned} \Delta \eta(x, y) &= -4\pi G\tilde{\psi}, & (2.23) \\ \eta(x, y)|_{\Gamma} &= 0, \\ \frac{\partial \eta(x, y)}{\partial y} \Big|_{y=0} &= 0, \\ \tilde{\psi} &= \begin{cases} 0, & \text{вне } \Omega_0 \\ \sigma h, & \text{в } \Omega_0 \end{cases} \end{aligned}$$

Уравнение (2.23) искусственно умножаем на  $\lambda$  ( $\lambda$ -любое). И интегрируем по всей исследуемой области.

$$\begin{aligned}
& \iint_{00}^{LM} \lambda(x, y) \frac{\partial^2 \eta(x, y)}{dx^2} dx dy \\
& + \iint_{00}^{LM} \lambda(x, y) \frac{\partial^2 \eta(x, y)}{dy^2} dx dy = -4\pi G \iint_{00}^{LM} \tilde{\psi} \lambda(x, y) dx dy = \\
& = -4\pi G \sigma h \iint_{00}^{LM} \lambda(x, y) dx dy. \tag{2.24}
\end{aligned}$$

Первый двойной интеграл в уравнений (2.24) обозначим через  $I_1$  и проинтегрируем по частям два раза.

$$\begin{aligned}
I_1 &= \iint_{00}^{LM} \lambda(x, y) \frac{\partial^2 \eta(x, y)}{dx^2} dx dy = \\
&= \int_0^M \left( \lambda(x, y) \frac{\partial \eta(x, y)}{dx} \Big|_0^L - \int_0^L \frac{\partial \eta(x, y)}{\partial x} \frac{\partial \lambda(x, y)}{\partial x} dx \right) dy = \\
&= \int_0^M \left( \lambda(x, y) \frac{\partial \eta(x, y)}{\partial x} \Big|_0^L - \frac{\partial \lambda(x, y)}{\partial x} \eta(x, y) \Big|_0^L + \int_0^L \eta(x, y) \frac{\partial^2 \lambda(x, y)}{\partial x^2} dx \right) dy.
\end{aligned}$$

Это слагаемое  $\frac{\partial \lambda(x, y)}{\partial x} \eta(x, y) \Big|_0^L$  равно нулю, так как на границе области  $\eta(x, y)$  равно нулю. Тогда

$$I_1 = \int_0^M \left( \lambda(x, y) \frac{\partial \eta(x, y)}{\partial x} \Big|_0^L + \int_0^L \eta(x, y) \frac{\partial^2 \lambda(x, y)}{\partial x^2} dx \right) dy.$$

Аналогично второй двойной интеграл в уравнений (2.24) обозначим через  $I_2$  и проинтегрируем по частям два раза.

$$\begin{aligned}
I_2 &= \iint_{00}^{LM} \lambda(x, y) \frac{\partial^2 \eta(x, y)}{dy^2} dx dy = \\
&= \int_0^L \left( \lambda(x, y) \frac{\partial \eta(x, y)}{dy} \Big|_0^M - \int_0^M \frac{\partial \eta(x, y)}{\partial y} \frac{\partial \lambda(x, y)}{\partial y} dy \right) dx = \\
&= \int_0^L \left( \lambda(x, y) \frac{\partial \eta(x, y)}{\partial y} \Big|_0^M - \eta(x, y) \frac{\partial \lambda(x, y)}{\partial y} \Big|_0^M + \int_0^M \eta \frac{\partial^2 \lambda}{\partial y^2} dy \right) dx.
\end{aligned}$$

Это слагаемое  $\lambda(x, y) \frac{\partial \eta(x, y)}{\partial y} \Big|_{y=0}$  равно нулю по постановке задачи,  $\eta(x, y) \frac{\partial \lambda(x, y)}{\partial y} \Big|_0^M$  равно нулю, так как  $\eta(x, y) \Big|_0^M$  на границе  $\Gamma$ .

Тогда

$$I_2 = \int_0^L \left( \lambda(x, y) \frac{\partial \eta(x, y)}{\partial y} \Big|_{y=M} + \int_0^M \eta(x, y) \frac{\partial^2 \lambda(x, y)}{\partial y^2} dy \right) dx.$$

Найденные  $I_1, I_2$  подставим в уравнение (2.24), получим:

$$\begin{aligned} & \iint_{00}^{LM} \eta(x, y) \Delta \lambda(x, y) dx dy \\ & + \int_0^M \lambda(x, y) \frac{\partial \eta(x, y)}{\partial x} \Big|_{x=L} dx - \int_0^M \lambda(x, y) \frac{\partial \eta(x, y)}{\partial x} \Big|_{x=0} dx + \\ & + \int_0^L \lambda(x, y) \frac{\partial \eta(x, y)}{\partial y} \Big|_{y=M} dx + \int_0^L \eta(x, y) \frac{\partial \lambda(x, y)}{\partial y} \Big|_{y=0} dx = \\ & = -4\pi G \sigma h \iint_{\Omega} \lambda(x, y) dx dy, \quad \forall \lambda \end{aligned} \quad (2.25)$$

Наша цель заключалась в выявлении  $\sigma$  явным образом из уравнения (2.22), что бы в дальнейшем разделить его на  $\sigma$  и перейти к пределу, таким образом получив производную Гаусса. В уравнении (2.25)  $\sigma$  выявлена явным образом. В связи с этим необходимо как-то связать уравнение (2.25) и (2.22).

Так как  $\lambda$  любое, мы можем его подобрать в качестве решения уравнения (2.25). Внимательно посмотрев на эти уравнения, замечаем, что

$$\int_0^L \eta(x, y) \frac{\partial \lambda(x, y)}{\partial y} \Big|_{y=0} dx = \int_0^L 2(v(x, 0) - \eta_1(x)) \eta(x, 0) dx.$$

Что бы выполнялось это равенство нужно чтобы

$$\frac{\partial \lambda(x, 0)}{\partial y} = 2(v(x, 0) - \eta_1(x)).$$

Давайте тогда лямбда выберем именно  $\frac{\partial \lambda(x, 0)}{\partial y} = 2(v(x, 0) - \eta_1(x))$ , но предварительно  $\lambda(x, y)$  пере обозначив через  $\lambda(x, y) = p(x, y)$ . Следовательно

$$\frac{\partial p(x, 0)}{\partial y} = 2(v(x, 0) - \eta_1(x)).$$

Теперь уравнение (2.25) пытаемся максимально упростить и обнулить все лишнее. Пусть (не забывая пере обозначить лямбда через  $p(x, y)$ ).

$$\begin{aligned} \Delta p(x, y) &= 0, \\ p(x, M) &= 0, \\ p(0, y) &= 0, \\ p(L, y) &= 0, \\ \frac{\partial p(x, 0)}{\partial y} &= 2(v(x, 0) - \eta_1(x)). \end{aligned}$$

Таким образом, мы получили сопряженную задачу (уравнение Лапласа с четырьмя граничными условиями, которое имеет прекрасное решение). Решим эту сопряженную задачу. Найдем  $p(x, y)$ . Тогда вычислим производную Гато:

$$I(\psi_0 + \sigma h) - I(\psi_0) = -4\pi G \sigma h \iint_{\Omega} p(x, y) dx dy + \int_0^L \left( \frac{\partial \eta(x, 0)}{\partial y} \right)^2 dx.$$

Делим на  $\sigma$  и переходим к пределу при  $\sigma$  стремящемся к нулю

$$(I'(\psi_0), h) = \lim_{\sigma \rightarrow 0} \left( \frac{I(\psi_0 + \sigma h) - I(\psi_0)}{\sigma} \right) = -4\pi G \iint_{\Omega} p(x, y) dx dy * h.$$

Следовательно, производная Гато равно:

$$I'(\psi_0) = -4\pi G \iint_{\Omega} p(x, y) dx dy.$$

*Замечание:*

Это слагаемое  $\int_0^L \left( \frac{\partial \eta(x, 0)}{\partial y} \right)^2 dx$  равно нулю (при делении на  $\sigma$  и перехода к пределу при  $\sigma$  стремящемся к нулю), так как интеграл второй степени и  $\sigma$  выходит в квадрате из-под интеграла и при делении на  $\sigma$ , одно  $\sigma$  остается. За счет того, что  $\sigma$  стремится к нулю, все это выражение будет стремиться к нулю.

## 2.4 Алгоритм решения

Ниже по пунктам показан алгоритм решения обратной оптимизационной задачи №1.

*Алгоритм действий при решении обратной задачи №1:*

1. Берем некоторое  $\psi_0$  – любое. Считаем прямую задачу по уравнениям (1.1) - (1.3), находим значение потенциала  $\eta(x, y)$ .
2. Считаем значение потенциала чуть ниже верхней границы, для расчета градиента потенциала  $\frac{\partial \eta(x, y)}{\partial y}$ . Вычисляем этот градиент.

3. Вычисляем функционал (2.1). Проверяем его на точность некоторого эпсилон.

4. Если значение функционала не близко к нулю (больше заданного эпсилон), то вычисляем градиент функционала (2.3). Но для этого надо прежде решить сопряженную задачу (2.4) с граничными условиями (2.5) - (2.8).

5. Решаем сопряженную задачу. Находим  $p(x, y)$  – решение сопряженной задачи.

6. Подставляем  $p(x, y)$  – решение сопряженной задачи в (2.1). Вычисляем производную минимизируемого функционала (производную Гато).

7. Подставляем производную Гато в (2.9). Вычисляем новую плотность  $\psi_{n+1}$ . Пере обозначим его через  $\psi_0$ .

8. С новой  $\psi_0$  проделываем все пункты с 1 по 7, до тех пор, пока пункт 3 (функционал (2.1) не будет удовлетворять некоторой точности).

Аналогичный алгоритм решения для обратной оптимизационной задачи №2.

*Алгоритм действий при решении обратной задачи №2:*

1. Берем некоторое  $\psi_0$  – любое. Считаем прямую задачу по уравнениям (1.1) - (1.3), находим значение потенциала  $\eta(x, y)$ .

2. Считаем значение потенциала на верхней границе  $\eta(\widetilde{x, y})|_{y=0}$ .

3. Вычисляем функционал (2.2). Проверяем его на точность некоторого эпсилон.

4. Если значение функционала не близко к нулю (больше заданного эпсилон), то вычисляем градиент функционала (2.10). Но для этого надо прежде решить сопряженную задачу (2.11) с граничными условиями (2.12) - (2.15).

5. Решаем сопряженную задачу. Находим  $p(x, y)$  – решение сопряженной задачи.

6. Подставляем  $p(x, y)$  – решение сопряженной задачи в (2.10). Вычисляем производную минимизируемого функционала (производную Гато).

7. Подставляем производную Гато в (2.9). Вычисляем новую плотность  $\psi_{n+1}$ . Пере обозначим его через  $\psi_0$ .

8. С новой  $\psi_0$  проделываем все пункты с 1 по 7, до тех пор, пока пункт 3 (функционал (2.2) не будет удовлетворять некоторой точности).

Разница между постановками первой и второй оптимизационной задачи в том, что в первой постановке в качестве краевого условия для уравнения Пуассона берется потенциал гравитационного поля  $\eta_1(x)$ , а градиент гравитационного поля  $\eta_2(x)$  используется в минимизируемом функционале. Во второй постановке оптимизационной задачи наоборот: граничное условие – это градиент гравитационного поля  $\eta_2(x)$ , а потенциал  $\eta_1(x)$  используется в минимизируемом функционале.

При вычислении производной функционала для второй оптимизационной задачи в производной Гато появляется минус по сравнению с производной функционала от первой оптимизационной задачи и одно граничное условие в сопряженной задачи меняется. Если в первой постановке оптимизационной

задачи в граничных условиях сопряженной задачи участвовал градиент гравитационного поля  $\eta_2(x)$ , то во второй оптимизационной задаче в граничных условиях сопряженной задачи фигурирует потенциал гравитационного поля  $\eta_1(x)$ . Остальные все формулы в двух оптимизационных задачах одинаковы.

Для решения уравнений внутри применяемого нами итерационного метода мы использовали метод Монте-Карло. В связи с большой размерностью решаемых объектов, и большим количеством расчетов мы остановили свой выбор на этом методе статистического моделирования вместо разностных схем. Преимуществом метода Монте-Карло была возможность поиска решения для некоторых точек, тогда как любой другой метод, основанный на разностных схемах, требует подсчета во всей исследуемой области. Еще одним плюсом метода Монте-Карло было в простоте распараллеливания при решении на суперкомпьютере. Суперкомпьютер мы планируем использовать при решении на реальных данных.

При написании программы мы столкнулись с тем, что значения потенциала и градиента должны строго коррелировать с аномалии. В связи с этим мы решили сначала путем решения прямой задачи смоделировать потенциал и градиент гравитационного поля. Для этих целей была написана программа `Generate_n1_n2_pryam`. Далее, используя полученные значения  $n1$  и  $n2$  решали обратную оптимизационную задачу.

Таким образом, мы знали наперед точное решение, и могли проводить анализ в ходе решения о близости полученного решения к точному решению.

Для решения обратной оптимизационной задачи №1 была написана программа `Poisson_pryam`. Программа решает задачи при помощи метода Монте-Карло путем случайного блуждания по решетке. При запуске решения необходимо предварительно сгенерировать  $n1$ ,  $n2$  путем запуска программы `Generaten1n2_pryam`. Программа была написана таким образом, что исследуемая область имеет изначально размерность 1 на 1. То есть квадрат от нуля до единицы. При необходимости можно изменить область пропорционально этим значениям. Аномалия для написанной программы может иметь форму только прямоугольника.

Для запуска обеих программ они должны находиться на диске C на компьютере и запуск производиться от имени администратора. В противном случае выдается информация об ошибке. При запуске `Generaten1n2_pryam` программа просит задать  $x0$ . Программа запрашивает месторасположение аномалии, то есть координаты начала аномалии по оси Oх. Так как сама исследуемая область от 0 до 1, то аномалия должна не выходить за эти числовые рамки. Далее программа запрашивает  $xend$ . Это координаты конца аномалии по оси Oх. Аналогично  $y0$  и  $yend$ . Необходимо запомнить вводимые данные, так как именно эти значения необходимо будет повторить при запуске программы `Poisson_pryam`. Далее `Generaten1n2_pryam` запрашивает значение плотности аномалии для построения  $n1$ ,  $n2$ . Это значение в дальнейшем будет точным значением решения обратной оптимизационной задачи №1. Так как

плотность грунта окружающее нефтяное месторождение обычно больше плотности самой нефти, а при расчете мы используем разность плотностей, то целесообразно использовать в качестве плотности отрицательное значение, например -10.

После благополучного запуска `Generaten1n2_pryam` на диске C компьютера автоматически создаются два файла `n1` и `n2` формата блокнот. В них записаны координаты по оси  $Ox$  (первый столбик) и координаты по оси  $Oy$  (второй столбик).

Далее запускаем `Poisson_pryam` также от имени администратора на диске C. Программа запрашивает координаты аномалии  $x_0$ ,  $x_{end}$ ,  $y_0$  и  $y_{end}$ . Вносим точно те значения что использовали для программы `Generaten1n2_pryam`. И обязательно в значениях используем точку, а не запятую для написания десятичных чисел. Далее программа запрашивает начальное приближения для плотности аномалии, здесь мы задаем значение отличное от того, что мы задавали для предыдущей программы (от точного значения плотности). Далее программа запрашивает эpsilon, для точности минимизируемого функционала. После ввода всех запрашиваемых параметров программа начинает считать. После окончания расчетов на диске C создается файл `iteration` формата блокнот. В файле `iteration` записаны все значения минимизируемого функционала на каждой итерации. В конце выдается запись о значении минимизируемого функционала, сравнивается с заданным эpsilon, для того чтобы удостовериться что функционал действительно меньше заданного значения эpsilon. Выдается значение плотности для данного функционала и показывается время счета программы в секундах.

Численное решения уравнения Пуассона в заданной точке исследуемой области находится с помощью моделирования реализаций случайного блуждания по решётке с дальнейшим усреднением по всему количеству реализаций. При этом, чем больше количество реализаций случайного блуждания по решётке, тем точнее получается оценка среднего. Следовательно, точнее получается численное решение уравнения Пуассона в заданной точке исследуемой области. Статистическая погрешность оценки среднего убывает обратно пропорционально квадратному корню от количества реализаций случайного блуждания по решётке. Стоит подчеркнуть, что реализации случайного блуждания по решётке независимы. Из всего это следует, что для достижения заданного уровня статистической погрешности оценки среднего нужно распараллеливать статистическое моделирование, что приведёт к существенному уменьшению времени счёта программы.

Распараллеливание статистического моделирования состоит в распределении моделирования независимых реализаций по вычислительным ядрам с периодическим осреднением полученных выборочных значений по статистически эффективной формуле следующего вида:

$$\bar{\zeta} = [\sum_{k=1}^K M_k]^{-1} \sum_{k=1}^K M_k \bar{\zeta}_k.$$

Здесь  $K$  – общее число ядер,  $M_k$  – количество реализаций, полученное на  $k$  – ом ядре,  $\bar{\zeta}_k$  – оценка среднего, полученная на  $k$  – ом ядре. При распараллеливании статистического моделирования допустимо использовать вычислительные ядра с разной производительностью. При этом обмен данными можно свести к минимуму, допуская только начальную "загрузку" вычислительных ядер и финальное получение оценок средних. Действуя так, можно добиться обратно пропорциональной зависимости величины трудоемкости "распределенной" случайной оценки от числа ядер, при условии, что используемые ядра имеют одинаковую производительность [66-68]. Как правило, при параллельной реализации необходимый объём выборки базовых случайных чисел очень велик, поэтому целесообразно использовать длиннопериодные псевдослучайные последовательности. А именно, предлагается использовать 128 – битный конгруэнтный генератор псевдослучайных чисел с длиной периода  $L = 2^{126} \approx 10^{38}$ .

## 2.5 Результаты счета обратной задачи гравиметрии на модельных данных

Обратную задачу гравиметрии на модельных данных мы решили градиентным методом, в котором использовали метод Монте-Карло для решения уравнения и получили следующие результаты счета.

### 2.5.1 Базовый вариант счета обратной задачи

Для анализа решения обратной задачи гравиметрии мы провели ряд расчетов с изменением параметром места расположения аномалии. А именно аномалию мы взяли размером 0,1 на 0,1 (рисунок 11). И начали передвигать аномалию с места на место. Вся область размером от 0 до 1. Мы не стали рассматривать касание аномалии с границей исследуемой области, так как ранее при решении прямой задачи данное положение давало сильное искажение.

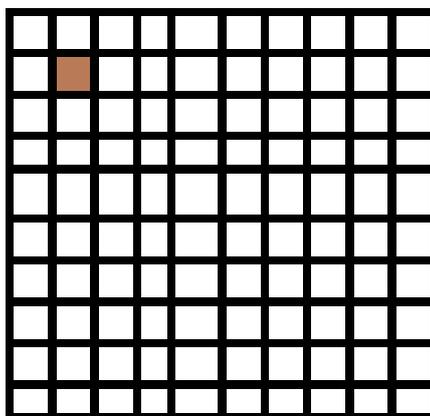


Рисунок 11 - Расположение аномалии в базовом решении.

В качестве базового решения я взяла первые два запуска программы по решению обратной задачи методом Монте-Карло. Начало отсчета (0;0) всей области – это левый верхний угол области (рисунок 11). В программу мы задаем координаты левого верхнего угла аномалии по оси Oх ( $x_0$ ;  $x_n$ ), по оси Oy ( $y_0$ ;  $y_n$ ). В таблице 5 №1 и №2 это запуски программы (первый запуск, второй запуск). Psitochное – это точное значение плотности аномалии. Его мы предварительно задаем для формирования потенциала и градиента гравитационного поля ( $\eta_1(x)$ ,  $\eta_2(x)$ ). psi0 – это начальное значение плотности аномалии, оно в принципе может быть любое. Psiresh – это значение плотности аномалии, полученное путем расчетов при решении обратной задачи гравиметрии методом Монте-Карло. Далее в таблице 5 посчитаны абсолютные и относительные погрешности и погрешность в процентах. В данном случае погрешность более 32%. epsilon – это точность минимизируемого функционала при решении оптимизационной задачи. И последняя строка в таблице 5 - это время счета в секундах. Как видно по первым двум запускам программы, если не менять аномалию, то время счета может иметь не большую разницу. Хотя результаты значения плотности аномалии идентичны.

Таблица 5 - Значения восстановленной плотности аномалии на глубине 0,1 от поверхности земли

Единицы измерения	Обозначения в программе	Первый слой	
		№1	№2
размеры	$x_0$	0,1	0,1
-	$x_n$	0,2	0,2
-	$y_0$	0,1	0,1
-	$y_n$	0,2	0,2
-	psitochное	-10	-10
-	psi0	-15	-15
-	psiresh	-13,253	-13,253
-	абс.погрешность	3,253	3,253
-	отн.погрешность	0,3253	0,3253
-	погрешность в %	32,53	32,53
-	epsilon	0,01	0,01
секунд	vremya chota	592,099	602,909

### 2.5.2 Влияние изменения месторасположения аномалии при решении обратной задачи

Первый слой расчетов проводился чуть ниже поверхности, точнее на глубине 0,1 от поверхности. Результаты расчетов показаны в таблице 6. Аномалия перемещалась слева на права по первому слою.

Как видно по расчетам центральное положение дало самое близкое значение к точному решению поиска плотности аномалии (таблица 6). Скорее всего влияние граничных условия для обратных задач тоже имеет большое

значение. То есть границы должны располагаться очень далеко от аномалии, чтобы не исказить результаты расчетов.

Таблица 6 - Значения восстановленной плотности аномалии на глубине 0,1 от поверхности земли

Обозначения в программе	Первый слой							
	№3	№4	№5	№6	№7	№8	№9	№10
x0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
xn	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
y0	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1
yn	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2
psitochное	-10	-10	-10	-10	-10	-10	-10	-10
psi0	-14	-14	-14	-14	-14	-14	-14	-14
psiresh	-13,259	-12,751	-12,54	-12,478	-12,471	-12,491	-12,713	13,292
epsilon	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01
vremya chota	291,548	375,352	386,178	371,53	995,993	519,044	598,963	282,11

Второй слой был на глубине 0,2 от поверхности. Как видно из расчетов в таблице 7 плотность восстановлена уже хуже первого слоя. Но опять же самое близкое значение из всех вариантов на втором слое дает среднее расположение аномалии. Это снова подтверждение влияния граничных условий и глубины залегания аномалии.

Таблица 7 - Значения восстановленной плотности аномалии на глубине 0,2 от поверхности земли

Обозначения в программе	Второй слой							
	№11	№12	№13	№14	№15	№16	№17	№18
x0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
xn	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
y0	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2
yn	0,3	0,3	0,3	0,3	0,3	0,3	0,3	0,3
psitochное	-10	-10	-10	-10	-10	-10	-10	-10
psi0	-14	-14	-14	-14	-14	-14	-14	-14
psiresh	-14	-14	-13,897	-13,642	-13,784	-13,899	-14	-14
epsilon	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01
vremya chota	16,723	20,264	51,838	130,977	94,442	63,258	13,618	13,556

Третий слой залегает на глубине 0,3. И уже на этой глубине плотность практически не восстанавливается (таблица 8). Программа останавливает расчеты на первой итерации. Возможно, стоило уменьшить эpsilon. Все расчеты производились для эpsilon раной 0,01. Дальнейшие расчеты на последующих слоях я посчитала не целесообразно считать, все равно уже не восстановит.

Таблица 8 - Значения восстановленной плотности аномалии на глубине 0,3 от поверхности земли

Обозначения в программе	Третий слой							
	№19	№20	№21	№22	№23	№24	№25	№26
x0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
xn	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
y0	0,3	0,3	0,3	0,3	0,3	0,3	0,3	0,3
yn	0,4	0,4	0,4	0,4	0,4	0,4	0,4	0,4
psitochное	-10	-10	-10	-10	-10	-10	-10	-10
psi0	-14	-14	-14	-14	-14	-14	-14	-14
psiresн	-14	-14	-14	-14	-14	-14	-14	-14
epsilon	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01
vremya chota	20,732	17,409	16,442	21,122	17,269	16,052	16,177	15,506

*Вывод:* наиболее точно восстанавливается плотность при центральном расположении аномалии и ближе к поверхности. Чем глубже аномалия, тем хуже восстанавливается плотность или вообще не восстанавливается.

### 2.5.3 Влияние изменения размера аномалии при решении обратной задачи

Учитывая предыдущий анализ, мы провели серию расчетов с изменением размеров аномалии. Взяли только центральное расположение. Результаты расчетов показаны в таблице 9. Значения восстановленной плотности аномалии при изменении размеров неоднородности, при центральном расположении центра тяжести аномалии.

Таблица 9 – Изменение размеров аномалии по центру исследуемой области

Обозначения в программе	2 на 2	4 на 4	6 на 6	8 на 8
x0	0,4	0,3	0,2	0,1
xn	0,6	0,7	0,8	0,9
y0	0,4	0,3	0,2	0,1
yn	0,6	0,7	0,8	0,9
psitochное	-10	-10	-10	-10
psi0	-14	-14	-14	-14
psiresн	-13,776	-11,345	-10,627	-10,37
epsilon	0,01	0,01	0,01	0,01
vremya chota	73,398	395,227	333,871	257,915

На начальном этапе мы взяли размер аномалии 2 на 2 и расположили его по центру исследуемой области. Значение плотности получили -13,776 (точное -10). Далее увеличивали размер 4 на 4, 6 на 6, 8 на 8. При этом центр аномалии не менялся. Как показывают расчеты наиболее точно восстановился последний

вариант аномалии 8 на 8. Значение плотности  $-10,37$  при точном значении плотности  $-10$ .

Вывод: Хорошая точность связана с большим размерам аномалии, который дает большой отклик на гравитационное поле, а также с малой глубиной залегания аномалии от поверхности.

#### 2.5.4 Критерии остановки минимизируемого функционала

При работе с итерационными процессами всегда встает проблема обрыва алгоритма. Мы экспериментально пытаемся установить, как далеко можно продвинуться в процессе минимизации функционала. В таблице 10 показаны значения восстановленной плотности аномалии при центральном расположении неоднородности ( $0,5-0,6$  на  $0,5-0,6$ ) с учетом изменения точности эпсилон.

Таблица 10 – Изменение точности расчетов

Обозначения в программе	Центральное расположение аномалии			
	0,5	0,6	0,5	0,6
x0	0,5	0,5	0,5	0,5
xn	0,6	0,6	0,6	0,6
y0	0,5	0,5	0,5	0,5
yn	0,6	0,6	0,6	0,6
psitochное	-10	-10	-10	-10
psi0	-14	-14	-14	-14
psiresн	-13,318	-10,96	-10,226	Граница минимизации функционала
epsilon	0,001	0,0001	0,00001	0,000001
vremya chota	503,444	3601,781	6882,513	Алгоритм не останавливается

Мы взяли аномалию размером  $0,1$  на  $0,1$  и расположили ее по центру исследуемой области и начали проводить все расчеты для разных эпсилон. Эпсилон описывает точность приближения минимизируемого функционала к нулю, то есть с какой точностью значение функционала равно нулю. Так как мы знаем, что все численные расчеты не могут дать нам абсолютный нуль. Ясно что с уменьшением эпсилон время расчета увеличивается, как показано в таблице. Самое приближенное к точному решению значение плотности мы получили при эпсилон равное  $0,00001$ . Исследовательский интерес вызвало то, что при эпсилон равное  $0,000001$  программа не может решить поставленную обратную задачу. Все дело в том, что значение минимизируемого функционала достигает своего предела, принимая то положительные, то отрицательные значения. То есть функционал прекращает уменьшаться. При эпсилон равное  $0,000001$  мы достигаем границы минимизации функционала.

*Вывод:* оказывается, все численные методы имеют предел точности, обусловленный точностью данных, аппроксимации области и другие (это тема была подробно изучена научным руководителем Серовайским С.Я. с учениками). Как только мы начинаем запрашивать у программы точность превышающую точность самого алгоритма, алгоритм прекращает выполнять свою функцию по минимизации функционала. Что делать? Необходимо уменьшать погрешность алгоритма путем дробления области на более меньшую сетку или какие-либо другие способы по увеличению точности самого алгоритма.

## **Выводы по разделу 2**

Во второй главе мы рассмотрели математическую постановку обратной задачи гравиметрии, свели обратную задачу к двум оптимизационным задачам. Доказали единственность решения оптимизационной задачи за счет строгой выпуклости минимизируемого функционала. Вывели производную Гаусса функционалов для двух оптимизационных задач и дали алгоритм решения оптимизационной задачи градиентным методом на модельных данных. Дали описание метода Монте-Карло касательно нашей постановки. Провели подробное исследование различных расположении аномалии в исследуемой области, нашли взаимосвязь между расположением аномалии, размерами аномалии и восстановлением плотности аномалии. Провели оценку точности решения обратной задачи гравиметрии на модельных данных методом Монте-Карло. На основе полученной математической модели и анализа модельных данных была решена обратная задача на модельных данных. Подробно описана работа исполняемого файла для решения обратной задачи гравиметрии методом Монте-Карло. Численные расчеты были проведены для первой оптимизационной задачи, аналогичные результаты можно подучить и для второй оптимизационной задачи.

По результатам главы 2 по решению обратной задачи мною с соавторами была опубликована статья на Четырнадцатой международной азиатской школе-семинаре «Проблемы оптимизации сложных систем» (Кыргызская Республика, Иссык-Куль, июль 2018 г.) [7, с. 72-79], тезис на Международной научно-практической конференции «Актуальные проблемы информатики, механики и робототехники. Цифровые технологии в машиностроении.» (ИММаш имени У.А. Джолдасбекова, Алматы, Казахстан, октябрь 2018 г.) [12, с. 91-92].

Опубликованы 2 статьи ККСОН: Analysis of the gradient and potential of the anomaly gravitational field. (Вестник Карагандинского университета. Серия «Математика». №1(93) 2019) [11, с. 140-145], вторая статья – Mathematical problems of gravimetry and its applications (International Journal of Mathematics and Physics 10, №1, 29 (2019)) [3, с. 29–35].

На основе двухмесячной зарубежной стажировки в Институте вычислительной техники и математической геофизики в г. Новосибирске были опубликованы статья: Решение обратной задачи гравиметрии методом Монте-Карло на суперкомпьютере с использованием распределённых вычислений (XIII

Международная конференция – Параллельные вычислительные технологии (Павт2019) г. Калининград, 2019) [15, с. 327-338] и тезис: Сравнение показаний потенциала гравитационного поля и его градиента (Десятая международная молодежная научная школа-конференция «Теория и численные методы решения обратных и некорректных задач» Новосибирск, Академгородок, октябрь 2018) [13, с. 30];

В ходе исследования пришли к выводам, что необходимо менять постановку задачи, в частности нужно расширять границы исследуемой области таким образом, чтобы границы области не давали искажения при расчетах как прямой, так и обратной задачи гравиметрии. Улучшение постановки задачи и исследование новой постановки мы продолжили в главе 3 данной диссертации.

### 3 ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ГРАВИМЕТРИИ С ДАННЫМИ НА ВНУТРЕННЕЙ ПОВЕРХНОСТИ

В предшествующей главе решалась обратная задача гравиметрии на основе измеряемой информации на поверхности земли. При этом на остальной границе рассматриваемой области задавалось нулевое значение гравитационного потенциала. В ходе вычисления мы поняли, что необходимо менять постановку задачи, так как в реальности на поверхности Земли измеряется только градиент гравитационного поля. С другой стороны, мы знаем, что влияние исследуемой неоднородности ослабевает по мере удаления от нее. В этой связи мы расширяем область во все стороны и задаем на границе расширенной области нулевое значение потенциала. В результате области измерения градиента потенциала гравитационного поля оказывается внутри исследуемой области. Таким образом получается, согласно математической модели, измерения градиентов гравитационного поля имеются на внутренней границе исследуемой области.

В этой главе мы подробнее опишем новую постановку задачи, приближенную к реальным данным и найдем пути решения обратной задачи гравиметрии с данными на внутренней границе методом Нелдера-Мида. Использование градиентного метода в решении обратной задачи невозможно в связи с производной от дельта-функции, возникающей в сопряженной задаче. Метод Нелдера-Мида [66] позволяет решить поставленную задачу с достаточно хорошей точностью без использования градиента функционала.

#### 3.1 Постановка обратной задачи гравиметрии на модельных данных со значениями градиента гравитационного поля на внутренней границе

Опираясь на свойство убывания гравитационного поля по мере удаления от объекта, расширим исследуемую область во все четыре стороны таким образом, что гравитационное поле аномалии на границах была равна нулю. Так мы получим расширенные искусственные нулевые границы. Для простоты будем считать, что мы расширяем область во все стороны на одинаковое расстояние  $P$ . Тогда по оси  $Ox$  мы имеем от 0 до  $2*P+L$ . По оси  $Oy$  мы имеем от  $-M-P$  до  $P$ .

Математически получается уравнение Пуассона с нулевыми граничными условиями и дополнительным условием на отрезке, расположенной во внутренней части исследуемой области (значения показаний гравиметрами градиента гравитационного поля на отрезке НК).

$$\Delta \eta(x, y) = -4\pi G\psi(x, y), \quad (x, y) \in \Omega' \quad (3.1)$$

$$\eta(x, y)|_{\partial\Omega'} = 0, \quad (3.2)$$

$$\left. \frac{\partial \eta(x, y)}{\partial y} \right|_{NK} = \eta_2(x), \quad (3.3)$$

$$\psi(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{вне } \Omega_0 \\ \psi_0, & \text{в } \Omega_0 \end{cases} \quad (3.4)$$

Формула (3.1) описывает уравнение состояния потенциала гравитационного поля через уравнение Пуассона с нулевыми граничными условиями (3.2) на границах расширенной области  $\Omega'$ . Уравнение (3.3) дополнительное условие (измеренные значения на гравиметрах градиента гравитационного поля). Уравнение (3.4) задает плотность аномалии, где  $\psi_0$  – это разность плотностей аномалии и плотности окружаемого грунта.

Постановка обратной задачи формулируется следующим образом: *необходимо определить значение плотности аномалии  $\psi(x, y)$  в исследуемой расширенной области  $\Omega'$  при известных значениях градиента гравитационного поля  $\eta_2(x)$  на отрезке NK (рисунок 12).*

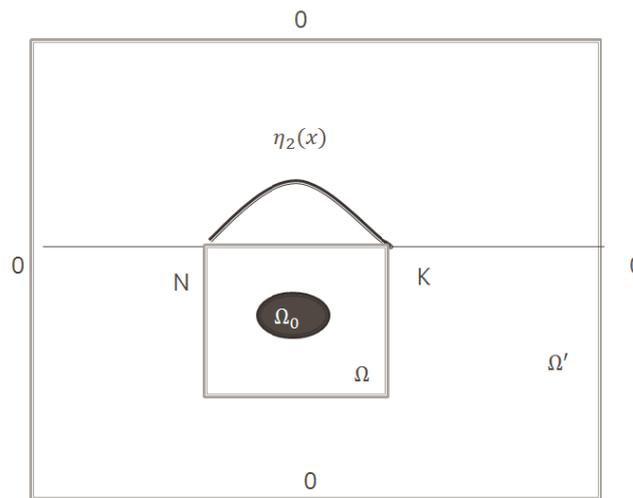


Рисунок 12 – Расширенная область

Для решения обратной задачи необходимо заменить ее на оптимизационную задачу. Для этого вводим функционал вида (3.5) – это квадратичное отклонение значения вертикальных составляющих градиента гравитационного поля от измеренных показаний гравиметров.

$$I(\psi_0) = \int_N^K \left( \left. \frac{\partial \eta(x, y)}{\partial y} \right|_{NK} - \eta_2(x) \right)^2 dx \rightarrow \min. \quad (3.5)$$

Следовательно, оптимизационная задача формулируется следующим образом: *требуется найти величину  $\psi_0$  из условия минимума функционала (3.5), где  $\psi_0$  имеет вид (3.4).*

### 3.2 Единственность решения оптимизационной задачи

Установим некоторые свойства поставленной задачи оптимального управления. Известно, что строго выпуклый функционал не может иметь двух точек минимума. Таким образом, для доказательства единственности решения задачи достаточно установить строгую выпуклость данного функционала.

Теорема 2:

*Функционал*

$$I(\psi_0) = \int_N^K \left( \frac{\partial \eta(x, y)}{\partial y} \Big|_{NK} - \eta_2(x) \right)^2 dx$$

является строго выпуклым, где  $\Psi_0$  – разность плотностей аномалии и окружающей среды.

Доказательство:

Возьмем уравнение потенциала гравитационного поля (3.1). В уравнении  $\eta(x, y)$  – потенциал гравитационного поля зависит от плотности  $\psi(x, y)$ .

Этап 1. Пере обозначим уравнение (3.1) в операторном виде:

$$A\eta(x, y) = C\psi(x, y).$$

Минимизируемый функционал (3.5) будет иметь вид:

$$I = \|B\eta(x, y) - \eta_2(x)\|^2, \text{ где } B - \text{это линейный оператор. Докажем это.}$$

Мы исследуем  $\psi(x, y) \rightarrow \eta(x, y)$ .

$$+ \begin{cases} A\eta_1(x, y) = C\psi_1(x, y) & | * \alpha \\ A\eta_2(x, y) = C\psi_2(x, y) & | * (1 - \alpha) \end{cases}$$

В итоге получаем

$$A(\alpha\eta_1(x, y) + (1 - \alpha)\eta_2(x, y)) = C(\alpha\psi_1(x, y) + (1 - \alpha)\psi_2(x, y)).$$

Пере обозначив через  $\eta_3(x, y) = \alpha\eta_1(x, y) + (1 - \alpha)\eta_2(x, y)$  и  $\psi_3(x, y) = \alpha\psi_1(x, y) + (1 - \alpha)\psi_2(x, y)$ , получаем  $A\eta_3(x, y) = C\psi_3(x, y)$ .

$$\eta(\alpha\psi_1(x, y) + (1 - \alpha)\psi_2(x, y)) = \alpha\eta(\psi_1(x, y)) + (1 - \alpha)\eta(\psi_2(x, y)). \quad (3.6)$$

Продифференцируем по  $y$  выражение (3.6) и получим выражение:

$$\frac{\eta(\alpha\psi_1(x, y) + (1 - \alpha)\psi_2(x, y))}{\partial y} = \alpha \frac{\eta(\psi_1(x, y))}{\partial y} + (1 - \alpha) \frac{\eta(\psi_2(x, y))}{\partial y}.$$

Следовательно,  $\psi(x, y) \rightarrow \frac{\eta(x, y)}{\partial y}$  отображение является аффинным.

Этап 2. Докажем строгую выпуклость операции возведения в квадрат. Возьмем функцию вида:

$$I(\psi) = \|B\eta(x, y) - \eta_2(x)\|^2.$$

Используя уравнение (3.6), получим:

$$\begin{aligned}
I(\alpha\psi_1(x, y) + (1 - \alpha)\psi_2(x, y)) &= \|B\eta(\alpha\psi_1(x, y) + (1 - \alpha)\psi_2(x, y)) - \eta_2(x)\|^2 \\
&= \|B(\alpha\eta_1(x, y) + (1 - \alpha)\eta_2(x, y)) - \eta_2(x)\|^2 = \\
&= \|\alpha B\eta_1(x, y) + (1 - \alpha)B\eta_2(x, y) - \eta_2(x)\|^2 = \\
&= \|\alpha(B\eta_1(x, y) - \eta_2(x)) + (1 - \alpha)(B\eta_2(x, y) - \eta_2(x))\|^2 = \\
&< \alpha\|B\eta_1(x, y) - \eta_2(x)\|^2 + (1 - \alpha)\|B\eta_2(x, y) - \eta_2(x)\|^2 = \\
&= \alpha I(\Psi_1) + (1 - \alpha)I(\Psi_2).
\end{aligned}$$

В итоге получили неравенство (3.7), что и требовалось доказать.

$$I(\alpha\psi_1(x, y) + (1 - \alpha)\psi_2(x, y)) < \alpha I(\Psi_1) + (1 - \alpha)I(\Psi_2). \quad (3.7)$$

*Этап 3.* И последнее осталось доказать, что операция интегрирования, тоже строго выпуклая функция. Возьмем функционал вида:

$$I(\psi) = \int_N^K \|B\eta(x, y) - \eta_2(x)\|^2 dx.$$

Аналогично этапу 2 получим:

$$\begin{aligned}
I(\alpha\psi_1(x, y) + (1 - \alpha)\psi_2(x, y)) &= \\
&= \int_N^K \|B\eta(\alpha\psi_1(x, y) + (1 - \alpha)\psi_2(x, y)) - \eta_2(x)\|^2 dx = \\
&= \int_N^K \|B(\alpha\eta_1(x, y) + (1 - \alpha)\eta_2(x, y)) - \eta_2(x)\|^2 dx = \\
&= \int_N^K \|\alpha B\eta_1(x, y) + (1 - \alpha)B\eta_2(x, y) - \eta_2(x)\|^2 dx = \\
&= \int_N^K \|\alpha B\eta_1(x, y) - \alpha\eta_2(x) + (1 - \alpha)B\eta_2(x, y) - (1 - \alpha)\eta_2(x)\|^2 dx = \\
&= \int_N^K \|\alpha(B\eta_1(x, y) - \eta_2(x)) + (1 - \alpha)(B\eta_2(x, y) - \eta_2(x))\|^2 dx < \\
&< \alpha \int_N^K \|B\eta_1(x, y) - \eta_2(x)\|^2 dx + (1 - \alpha) \int_N^K \|B\eta_2(x, y) - \eta_2(x)\|^2 dx = \\
&= \alpha I(\Psi_1) + (1 - \alpha)I(\Psi_2),
\end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

Следовательно, функционал (3.5) строго выпуклый. Из доказанного утверждения следует единственность решения задачи, то есть следующий результат:

**Теорема 3:**

*Задача минимизации функционала (3.5) не может иметь двух решений.*

### 3.3 Нахождение градиента функционала

Найдем производную имеющегося функционала, как это делалось раньше.

Теорема 4:

*Производная функционала  $I$  в точке  $\psi_0$  равна:*

$$I'(\psi_0) = 4\pi G \iint_{\Omega} p(x, y) dx dy, \quad (3.8)$$

где  $p(x, y)$  решение сопряженной системы имеющий следующий вид:

$$\Delta p(x, y) = \alpha(x) \frac{\partial}{\partial y} \left( 2 \left( \frac{\partial \eta(x, y)}{\partial y} - \eta_2(x) \right) \delta(y) \right), \quad (3.9)$$

$$p(0; y) = 0, \quad (3.10)$$

$$p(2P + L; y) = 0, \quad (3.11)$$

$$p(x; -M - P) = 0, \quad (3.12)$$

$$p(x; P) = 0. \quad (3.13)$$

В предшествующей главе для решения соответствующей задачи оптимального управления применялся градиентный метод. Для его использования необходимо определить производную рассматриваемого функционала. Вычислим градиент функционала, если он существует. Воспользуемся определением производной Гато:

$$(I'(\psi_0), h) = \lim_{\sigma \rightarrow 0} \left( \frac{I(\psi_0 + \sigma h) - I(\psi_0)}{\sigma} \right).$$

Так как функционал связан с плотностью  $\psi_0$  через уравнение состояния потенциала поля (3.1), то введем дополнительные обозначения.

Пусть плотность  $\psi_0$  переводит потенциал поля (3.1) в  $u(x, y)$ , а плотность  $\psi_0 + \sigma h$  переводит потенциал поля (3.1) в  $q(x, y)$ , то есть

$$\begin{aligned} \psi_0 &\rightarrow v(x, y), \\ \psi_0 + \sigma h &\rightarrow q(x, y). \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} I_*(\psi_0) &= \int_N^K \left( \frac{\partial v(x, 0)}{\partial y} - \eta_2(x) \right)^2 dx, \\ I_*(\psi_0 + \sigma h) &= \int_N^K \left( \frac{\partial q(x, 0)}{\partial y} - \eta_2(x) \right)^2 dx. \end{aligned}$$

Обозначим приращение функционала через:

$$\begin{aligned} \Delta I_*(\psi_0) &= I_*(\psi_0 + \sigma h) - I_*(\psi_0) = \\ &= \int_N^K \left[ \left( \frac{\partial q(x, 0)}{\partial y} - \eta_2(x) \right)^2 - \left( \frac{\partial v(x, 0)}{\partial y} - \eta_2(x) \right)^2 \right] dx = \\ &= \int_N^K \left( \frac{\partial q(x, 0)}{\partial y} + \frac{\partial v(x, 0)}{\partial y} - 2\eta_2(x) \right) \left( \frac{\partial q(x, 0)}{\partial y} - \frac{\partial v(x, 0)}{\partial y} \right) dx. \end{aligned}$$

Обозначим  $q(x, 0) - v(x, 0) = \eta(x, 0)$ , откуда  $q(x, 0) = v(x, 0) + \eta(x, 0)$ , тогда

$$\frac{\partial \eta(x, 0)}{\partial y} = \frac{\partial q(x, 0)}{\partial y} - \frac{\partial v(x, 0)}{\partial y} \text{ и } \frac{\partial q(x, 0)}{\partial y} = \frac{\partial v(x, 0)}{\partial y} + \frac{\partial \eta(x, 0)}{\partial y}.$$

Тогда приращение функционала равно:

$$\Delta I_*(\psi_0) = \int_N^K 2 \left( \frac{\partial v(x, 0)}{\partial y} - \eta_2(x) \right) \frac{\partial \eta(x, 0)}{\partial y} dx + \int_N^K \left( \frac{\partial \eta(x, 0)}{\partial y} \right)^2 dx.$$

В итоге получилось:

$$I_*(\psi_0 + \sigma h) - I_*(\psi_0) = \int_N^K 2 \left( \frac{\partial v(x, 0)}{\partial y} - \eta_2(x) \right) \frac{\partial \eta(x, 0)}{\partial y} dx + \int_N^K \left( \frac{\partial \eta(x, 0)}{\partial y} \right)^2 dx. \quad (3.14)$$

Далее мы должны посчитать  $(I_*'(\psi_0), h) = \lim_{\sigma \rightarrow 0} \frac{I_*(\psi_0 + \sigma h) - I_*(\psi_0)}{\sigma}$ , но уравнение (3.14) не зависит от  $\sigma$  явным образом.  $\sigma$  связано с уравнением (3.14) через уравнение состояния системы (3.1) (для нашей постановки задачи — это потенциал гравитационного поля).

Мы уже ранее вводили обозначение

$$\begin{aligned} \psi_0 &\rightarrow v(x, y), \\ \psi_0 + \sigma h &\rightarrow q(x, y). \end{aligned}$$

Это значит, плотности  $\psi_0$  соответствует потенциал гравитационного поля, описываемый функцией  $v(x, y)$ . Аналогично для плотности поля  $\psi_0 + \sigma h$  соответствует поля потенциалом  $q(x, y)$ .

Распишем постановку задачи (3.1) - (3.5) через две функции  $q(x, y)$  и  $v(x, y)$ .

$$\begin{aligned} \Delta v(x, y) &= -4\pi\psi(\psi_0)G, & \Delta q(x, y) &= -4\pi\psi(\psi_0 + \sigma h)G, \\ v(x, y)|_{\partial\Omega'} &= 0, & q(x, y)|_{\partial\Omega'} &= 0, \\ \psi(\psi_0) &= \begin{cases} 0, & \text{вне } \Omega_0 \\ \psi_0, & \text{в } \Omega_0 \end{cases}, & \psi(\psi_0 + \sigma h) &= \begin{cases} 0, & \text{вне } \Omega_0 \\ \psi_0 + \sigma h, & \text{в } \Omega_0 \end{cases}. \end{aligned}$$

Теперь отнимем эти два уравнения друг от друга и введем обозначение  $\eta(x, y) = q(x, y) - v(x, y)$ . Тогда уравнение примет вид:

$$\Delta \eta(x, y) = -4\pi G [\psi(\psi_0 + \sigma h) - \psi(\psi_0)].$$

Обозначим  $[\psi(\psi_0 + \sigma h) - \psi(\psi_0)] = \tilde{\psi}$ , тогда

$$\begin{aligned} \Delta \eta(x, y) &= -4\pi G \tilde{\psi}, \\ \eta(x, y)|_{\partial\Omega'} &= 0, \end{aligned} \quad (3.15)$$

где  $\partial\Omega'$  граница всей исследуемой расширенной области

$$\tilde{\psi} = \begin{cases} 0, & \text{вне } \Omega_0 \\ \sigma h, & \text{в } \Omega_0. \end{cases}$$

Уравнение (3.15) искусственно умножаем на  $\lambda(x, y)$  ( $\lambda(x, y)$ -любое). И интегрируем по всей исследуемой области.

$$\begin{aligned} & \iint_{0, -M-P}^{2P+L, P} \lambda(x, y) \frac{\partial^2 \eta(x, y)}{dx^2} dx dy \\ + & \iint_{0, -M-P}^{2P+L, P} \lambda(x, y) \frac{\partial^2 \eta(x, y)}{dy^2} dx dy = -4\pi G \iint_{0, -M-P}^{2P+L, P} \lambda(x, y) \tilde{\psi} dx dy = \\ & = -4\pi G \sigma h \iint_{0, -M-P}^{2P+L, P} \lambda(x, y) dx dy. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Первый двойной интеграл в уравнении (3.16) обозначим через  $I_{1*}$  и проинтегрируем по частям два раза.

$$\begin{aligned} I_{1*} &= \iint_{0, -M-P}^{2P+L, P} \lambda(x, y) \frac{\partial^2 \eta(x, y)}{dx^2} dx dy = \\ &= \int_{-M-P}^P \left( \lambda(x, y) \frac{\partial \eta(x, y)}{dx} \Big|_0^{2P+L} - \int_0^{2P+L} \frac{\partial \eta(x, y)}{\partial x} \frac{\partial \lambda(x, y)}{\partial x} dx \right) dy = \\ &= \int_{-M-P}^P \left( \lambda(x, y) \frac{\partial \eta(x, y)}{\partial x} \Big|_0^{2P+L} - \frac{\partial \lambda(x, y)}{\partial x} \eta(x, y) \Big|_0^{2P+L} \right. \\ & \quad \left. + \int_0^{2P+L} \eta(x, y) \frac{\partial^2 \lambda(x, y)}{\partial x^2} dx \right) dy. \end{aligned}$$

Это слагаемое  $\frac{\partial \lambda(x,y)}{\partial x} \eta(x,y) \Big|_0^{2P+L}$  равно нулю, так как на границе области  $\eta(x,y)$  равно нулю. Тогда

$$I_{1*} = \int_{-M-P}^P \left( \lambda(x,y) \frac{\partial \eta(x,y)}{\partial x} \Big|_0^{2P+L} + \int_0^{2P+L} \eta(x,y) \frac{\partial^2 \lambda(x,y)}{\partial x^2} dx \right) dy.$$

Аналогично второй двойной интеграл в уравнений (3.16) обозначим через  $I_{2*}$  и проинтегрируем по частям два раза.

$$\begin{aligned} I_{2*} &= \iint_{0, -M-P}^{2P+L, P} \lambda(x,y) \frac{\partial^2 \eta(x,y)}{dy^2} dx dy = \\ &= \int_0^{2P+L} \left( \lambda(x,y) \frac{\partial \eta(x,y)}{dy} \Big|_{-M-P}^P - \int_{-M-P}^P \frac{\partial \eta(x,y)}{\partial y} \frac{\partial \lambda(x,y)}{\partial y} dy \right) dx = \\ &= \int_0^{2P+L} \left( \lambda(x,y) \frac{\partial \eta(x,y)}{\partial y} \Big|_{-M-P}^P - \frac{\partial \lambda(x,y)}{\partial y} \eta(x,y) \Big|_{-M-P}^P \right. \\ &\quad \left. + \int_{-M-P}^P \eta(x,y) \frac{\partial^2 \lambda(x,y)}{\partial y^2} dy \right) dx. \end{aligned}$$

Это слагаемое  $\frac{\partial \lambda(x,y)}{\partial y} \eta(x,y) \Big|_{-M-P}^P$  равно нулю, так как на границе области  $\eta(x,y)$  равно нулю. Тогда

$$I_{2*} = \int_0^{2P+L} \left( \lambda(x,y) \frac{\partial \eta(x,y)}{\partial y} \Big|_{-M-P}^P + \int_{-M-P}^P \eta(x,y) \frac{\partial^2 \lambda(x,y)}{\partial y^2} dy \right) dx.$$

Найденные  $I_{1*}, I_{2*}$  подставим в уравнение (3.16), получим:

$$\begin{aligned} &\iint_{0, -M-P}^{2P+L, P} \eta(x,y) \Delta \lambda(x,y) dx dy \\ &+ \int_0^{2P+L} \lambda(x,y) \frac{\partial \eta(x,y)}{\partial y} \Big|_{y=-M-P} dx \\ &- \int_0^{2P+L} \lambda(x,y) \frac{\partial \eta(x,y)}{\partial y} \Big|_{y=0} dx + \int_{-M-P}^P \lambda(x,y) \frac{\partial \eta(x,y)}{\partial x} \Big|_0^{2P+L} dy = \\ &= -4\pi G \sigma h \iint_{\Omega} \lambda(x,y) dx dy, \quad \forall \lambda(x,y) \end{aligned} \quad (3.17)$$

Наша цель заключалась в выявлении  $\sigma$  явным образом из уравнения (3.14), что бы в дальнейшем разделить его на  $\sigma$  и перейти к пределу, таким образом получив производную Гаусса. В уравнении (3.17)  $\sigma$  выявлена явным образом. В связи с этим необходимо как-то связать уравнение (3.17) и (3.14).

Так как  $\lambda$  произвольно, мы можем его подобрать так, чтобы уравнение (3.17) было равно уравнению (3.14). Так как значения градиента гравитационного поля, измеряемого гравиметром, расположены внутри исследуемой области, а не на границе, следовательно, это даст отклик в сопряженной задаче на внутреннюю область. Тогда можно считать, что на границах в сопряженной задаче тоже нули, аналогично как в постановке задачи. Отсюда получаем нулевые граничные условия сопряженной задачи. И по аналогии с предыдущими задачами пере обозначим  $\lambda(x, y) = p(x, y)$ .

$$\begin{aligned} p(0; y) &= 0, \\ p(2P + L; y) &= 0, \\ p(x; -M - P) &= 0, \\ p(x; P) &= 0. \end{aligned}$$

Теперь необходимо вывести уравнение состояния для сопряженной задачи. Будем отталкиваться от уравнения (3.14). Напомним, как оно выглядит. Второе слагаемое мы не учитываем, так как там содержится  $\sigma$  в квадрате, после деления на  $\sigma$  и перехода к пределу второе слагаемое станет равно нулю.

$$I_*(\psi_0 + \sigma h) - I_*(\psi_0) = \int_N^K 2 \left( \frac{\partial v(x, 0)}{\partial y} - \eta_2(x) \right) \frac{\partial \eta(x, 0)}{\partial y} dx + \int_N^K \left( \frac{\partial \eta(x, 0)}{\partial y} \right)^2 dx. \quad (3.14)$$

Наша цель преобразовать первое слагаемое в двойной интеграл, что бы можно было найти аналогию со слагаемым с двойным интегралом из (3.17). Как преобразовать (3.14) в двойной интеграл?

Так как уравнение (3.14) не зависит от  $y$ , мы искусственно домножаем первое слагаемое (3.14) на дельта функцию от  $y$  ( $\delta(y)$ ). Далее интегрируем по  $y$  по всей исследуемой области.

$$\begin{aligned} & \int_N^K 2 \left( \frac{\partial v(x, 0)}{\partial y} - \eta_2(x) \right) \frac{\partial \eta(x, 0)}{\partial y} dx = \\ &= \iint_{-M-P, N}^{P, K} 2 \left( \frac{\partial v(x, y)}{\partial y} - \eta_2(x) \right) \frac{\partial \eta(x, y)}{\partial y} * \delta(y) dx dy \end{aligned}$$

Далее расширим отрезок НК до границы исследуемой области (рисунок 12). Возьмем функцию  $\alpha(x) = \begin{cases} 0, & x \notin [N; K] \\ 1, & x \in [N; K] \end{cases}$ .

$$\iint_{-M-P,0}^{P,2P+L} 2 \left( \frac{\partial v(x,y)}{\partial y} - \eta_2(x) \right) \frac{\partial \eta(x,y)}{\partial y} * \delta(y) * \alpha(x) dx dy.$$

Так как в уравнении (3.17) нам нужно  $\eta(x,y)$  в «чистом» виде (без производной), то мы будем интегрировать по частям.

$$\begin{aligned} & \iint_{-M-P,0}^{P,2P+L} 2 \left( \frac{\partial v(x,y)}{\partial y} - \eta_2(x) \right) \frac{\partial \eta(x,y)}{\partial y} * \delta(y) * \alpha(x) dx dy = \\ & = \int_0^{2P+L} \alpha(x) \int_{-M-P}^P 2 \left( \frac{\partial v(x,y)}{\partial y} - \eta_2(x) \right) \delta(y) \frac{\partial \eta(x,y)}{\partial y} dy dx. \end{aligned}$$

Первое слагаемое равно нулю, так как на границах нули. Второе слагаемое равно:

$$- \iint_{-M-P,0}^{P,2P+L} \alpha(x) * \frac{\partial}{\partial y} \left( 2 \left( \frac{\partial v(x,y)}{\partial y} - \eta_2(x) \right) \delta(y) \right) * \eta(x,y) dx dy$$

Сравниваем полученное с уравнением (3.17) и в качестве функции  $\lambda(x,y)$ , которая была произвольной, выбираем конкретную функцию  $p(x,y)$ , которая является решением сопряженной системы:

$$\begin{aligned} \Delta p(x,y) &= \alpha(x) \frac{\partial}{\partial y} \left( 2 \left( \frac{\partial \eta(x,y)}{\partial y} - \eta_2(x) \right) \delta(y) \right), \quad (3.18) \\ p(0;y) &= 0, \\ p(2P+L;y) &= 0, \\ p(x;-M-P) &= 0, \\ p(x;P) &= 0. \end{aligned}$$

Таким образом, мы получили сопряженную задачу (уравнение Пуассона с четырьмя нулевыми граничными условиями). Найдём разность:

$$I_*(\Psi_0 + \sigma h) - I_*(\Psi_0) = 4\pi G \sigma h \iint_{\Omega} p(x,y) dx dy + \int_0^L \left( \frac{\partial \eta(x,0)}{\partial y} \right)^2 dx.$$

Делим на  $\sigma$  и переходим к пределу при  $\sigma$  стремящемся к нулю

$$(I_*'(\psi_0), h) = \lim_{\sigma \rightarrow 0} \left( \frac{I_*(\psi_0 + \sigma h) - I_*(\psi_0)}{\sigma} \right) = 4\pi G \iint_{\Omega'} p(x, y) dx dy * h.$$

Следовательно, производная Гато равно:

$$I_*'(\psi_0) = 4\pi G \iint_{\Omega'} p(x, y) dx dy.$$

Замечание:

Это слагаемое  $\int_0^L \left( \frac{\partial \eta(x, 0)}{\partial y} \right)^2 dx$  равно нулю (при делении на  $\sigma$  и перехода к пределу при  $\sigma$  стремящемся к нулю), так как интеграл второй степени и  $\sigma$  выходит в квадрате из-под интеграла и при делении на  $\sigma$ , одно  $\sigma$  остается. За счет того, что  $\sigma$  стремиться к нулю, все это выражение будет стремиться к нулю.

Сложность данной постановки задачи заключается в уравнении состоянии сопряженной задачи. А именно, правая часть уравнения (3.18) содержит производную от дельта-функции. С производной от дельта-функции не понятно, как работать и как вычислять численно производную от дельта-функции.

### 3.4 Метод Нелдера-Мида

Нам нужен алгоритм, который, с одной стороны, не требует вычисления производной функционала, а, с другой, хорошо работает в условиях его строгой выпуклости. Обоим этим условиям удовлетворяет метод Нелдера-Мида [67]. Метод Нелдера-Мида (называется также поиском по деформируемому многограннику) — метод оптимизации (поиска минимума) функции от нескольких переменных. Простой и в то же время эффективный метод, позволяющий оптимизировать функции без использования градиентов. Метод надежен и, как правило, показывает хорошие результаты, хотя и отсутствует теория сходимости.

Алгоритм заключается в формировании симплекса (simplex) и последующего его деформирования в направлении минимума, посредством трех операций: 1) Отражение (reflection); 2) Растяжение (expansion); 3) Сжатие (contract). Симплекс представляет из себя геометрическую фигуру, являющуюся  $n$  - мерным обобщением треугольника. Для одномерного пространства — это отрезок, для двумерного - треугольник. Таким образом  $n$  - мерный симплекс имеет  $n + 1$  вершину.

Метод Нелдера-Мида легко реализуем на языке программирования python. Может использоваться в функции optimize из модуля scipy.optimize популярной

библиотеки для языка python, которая используется для математических расчетов. Достаточно вызвать команду

```
minimize(func, init, method='nelder-mead')
```

где func — это минимизируемый функционал, init – начальное приближение функционала. Напомню, что точное значение плотности -10, а в качестве начального приближения мы берем -14. В следующем разделе описаны полученные результаты счета программы.

### 3.5 Анализ результатов

Для оценки эффективности используемого численного алгоритма решения мы проводим расчеты для модельных значений параметров и с заранее известным ответом.

Возьмем исследуемый квадрат размером 1 на 1. Аномалия размером 0,1 на 0,1. Мы считаем значение плотности аномалии везде одинаковое -10. Так как берется разность плотностей аномалии с внешним грунтом, то значение плотности отрицательное.

В первом подразделе показываем результаты расчетов основного или базового варианта расчета, так сказать отправная точка. Во втором подразделе мы меняем месторасположение аномалии и анализируем результаты полученных расчетов. Далее выявляем изменение размеров аномалии на результаты счета. В четвертом подразделе находим предел точности расчетов. В последнем подразделе исследуем влияние начального приближения на результаты счета.

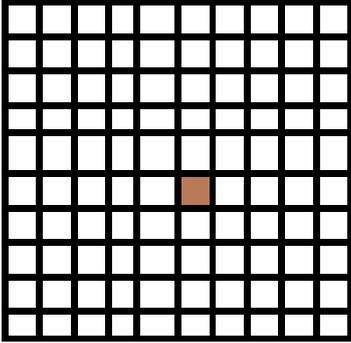
#### 3.5.1 Основной вариант счета

Для решения обратной задачи требуется многократное решение прямой задачи. Напомню, что решение прямой задачи — это расчет градиента гравитационного поля на поверхности исследуемой области с учетом известной плотностью аномалии и ее месторасположения. Потом мы забываем о точном значении плотности  $\psi_0$  и берем любое значение плотности  $\psi$  за начальное приближение. Далее используя решения прямой задачи для точного  $\psi_0$ , мы строим минимизируемый функционал. То есть считаем квадратичную разность между решением прямой задачи (с использованием начального приближения плотности) и решением прямой задачи для точного  $\psi_0$ . Дальше функционал минимизируем методом Нелдера-Мида.

Результаты счета показаны в таблице 11. На рисунке слева в таблице 11 показано расположение аномалии.  $\psi_{\text{fresh}} = -10,00003$  результат расчета программы (это найденное значение плотности  $\psi_0$ ). Напомню, что точное решение  $\psi_0 = -10$ . Абсолютная погрешность равна  $3,66 * 10^{-5}$ , а относительная погрешность равна  $3,66 * 10^{-6}$ . Что составляет 0,000366% погрешности. Значение функционала (6) равно  $2,42 * 10^{-10}$ , это почти нуль. То есть мы получили достаточно хорошее решение задачи.

Таким образом полученное решение для частного случая, мы можем распространить на любую форму аномалии путем разбиения ее на мелкие квадратики. Это очень удобно, учитывая то, что геолого-литологические профили нефтяного месторождения имеют формат плоской картины.

Таблица 11 – Результаты расчетов обратной задачи гравиметрии методом Нелдера-Мида на пятом слое

 <p>Расположение аномалии в исследуемой области</p>	<p>ПЯТЫЙ СЛОЙ – это шестой слой от поверхности земли</p>
$x_0$ – это координаты начала аномалии по оси $Ox$ .	0,5
$x_n$ – это координаты конца аномалии по оси $Ox$ .	0,6
$y_0$ – это координаты начала аномалии по оси $Oy$ .	0,5
$y_n$ – это координаты конца аномалии по оси $Oy$ .	0,6
$\rho_{\text{иточное}}$ – это точное значение плотности аномалии.	-10
$\rho_{\text{и0}}$ – это начальное приближение плотности аномалии.	-14
$\rho_{\text{иresh}}$ – результат решения обратной задачи гравиметрии методом Нелдера-Мида.	-10,0000366210937
абс.погрешность – абсолютная погрешность значения плотности.	3,66E-05
отн.погрешность – относительная погрешность значения плотности.	3,66E-06
погрешность в %	0,000366
$\epsilon$ – точность решения задачи.	0,01
Значение функционала.	2,42E-10

*Вывод:* Метод Нелдера-Мида решает с точностью до 0,000366% по умолчанию (эта точность задана в самом методе Нелдера-Мида в среде Python) обратную задачу гравиметрии с данными на внутренней границе.

### 3.5.2 Влияние изменения месторасположения аномалии

Проверяя программу на чувствительность к изменяющимся параметрам, мы провели ряд расчетов.

Исследуемая область имеет форму квадрата с размерами от 0 до 1. Аномалия имеет размер 0,1 на 0,1. В процессе решения я проверила расположение аномалии в диагональном положении. Результаты расчетов показаны в таблицах ниже.

На рисунках в таблицах показаны расположения аномалии. Так как область у нас квадратной формы размером 1 на 1, то исходную область мы делим на 10 частей и получаем своеобразную сетку. Поэтапно меняя месторасположение аномалии, проанализируем как это скажется на восстановлении плотности аномалии. Так как программа написана для квадратов, то месторасположение аномалии будет меняться по диагонали «сетки».

«Послойно» передвигая аномалию слева на право каждый раз опускаясь на один слой глубже, проанализируем результаты счета. В таблицах 11–18 как показывают расчеты особо нет изменений кроме координат месторасположения аномалии. Значение восстановленной плотности абсолютно одинаковые при любом расположении аномалии. Абсолютная и относительная погрешность тоже везде одинаковая. Есть небольшая разница в значениях функционала, но они все почти равны нулю.

Таблица 12 – Результаты расчетов обратной задачи гравиметрии методом Нелдера-Мида на первом слое

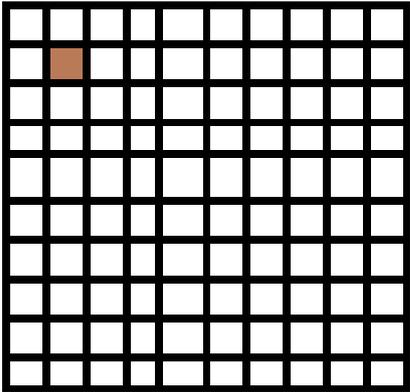
 <p>Расположение аномалии в исследуемой области</p>	<p>ПЕРВЫЙ СЛОЙ – это второй слой от поверхности земли, так как на границе нули</p>
<p><math>x_0</math> – это координаты начала аномалии по оси <math>Ox</math>.</p>	<p>0,1</p>
<p><math>x_n</math> – это координаты конца аномалии по оси <math>Ox</math>.</p>	<p>0,2</p>
<p><math>y_0</math> – это координаты начала аномалии по оси <math>Oy</math>.</p>	<p>0,1</p>
<p><math>y_n</math> – это координаты конца аномалии по оси <math>Oy</math>.</p>	<p>0,2</p>
<p><math>\rho_{иточное}</math> – это точное значение плотности аномалии.</p>	<p>-10</p>
<p><math>\rho_{i0}</math> – это начальное приближение плотности аномалии.</p>	<p>-14</p>
<p><math>\rho_{iresh}</math> – результат решения обратной задачи гравиметрии методом Нелдера-Мида.</p>	<p>-10,0000366210937</p>
<p>абс.погрешность – абсолютная погрешность значения плотности.</p>	<p>3,66211E-05</p>
<p>отн.погрешность – относительная погрешность значения плотности.</p>	<p>3,66211E-06</p>
<p>погрешность в %</p>	<p>0,000366211</p>
<p>Epsilon – точность решения задачи.</p>	<p>0,01</p>
<p>Значение функционала.</p>	<p>4,52E-10</p>

Таблица 13 – Результаты расчетов обратной задачи гравиметрии методом Нелдера-Мида на втором слое

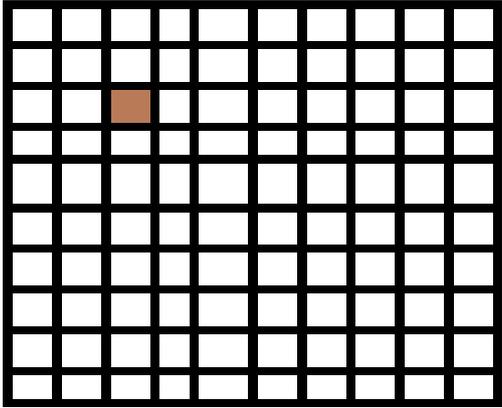
 <p>Расположение аномалии в исследуемой области</p>	<p>ВТОРОЙ СЛОЙ – это третий слой от поверхности земли.</p>
<p><math>x_0</math> – это координаты начала аномалии по оси <math>Ox</math>.</p>	<p>0,2</p>
<p><math>x_1</math> – это координаты конца аномалии по оси <math>Ox</math>.</p>	<p>0,3</p>
<p><math>y_0</math> – это координаты начала аномалии по оси <math>Oy</math>.</p>	<p>0,2</p>
<p><math>y_1</math> – это координаты конца аномалии по оси <math>Oy</math>.</p>	<p>0,3</p>
<p><math>\rho_{\text{иточное}}</math> – это точное значение плотности аномалии.</p>	<p>-10</p>
<p><math>\rho_{\text{psi0}}</math> – это начальное приближение плотности аномалии.</p>	<p>-14</p>
<p><math>\rho_{\text{psiresh}}</math> – результат решения обратной задачи гравиметрии методом Нелдера-Мида.</p>	<p>-10,0000366210937</p>
<p>абс.погрешность – абсолютная погрешность значения плотности.</p>	<p>3,66E-05</p>
<p>отн.погрешность – относительная погрешность значения плотности.</p>	<p>3,66E-06</p>
<p>погрешность в %</p>	<p>0,000366</p>
<p>Epsilon – точность решения задачи.</p>	<p>0,01</p>
<p>Значение функционала.</p>	<p>1,18E-10</p>

Таблица 14 – Результаты расчетов обратной задачи гравиметрии методом Нелдера-Мида на третьем слое

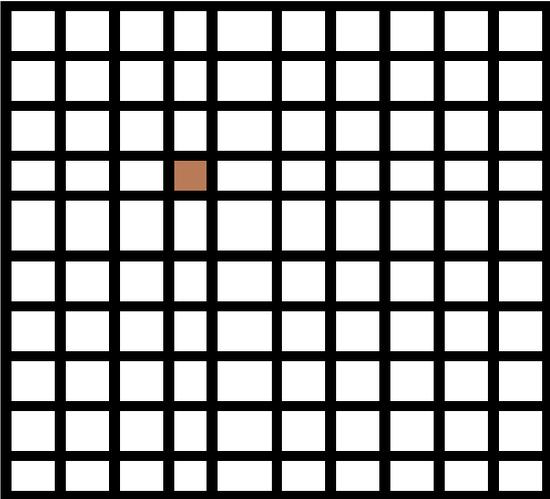
 <p>Расположение аномалии в исследуемой области</p>	<p>ТРЕТИЙ СЛОЙ – это четвертый слой от поверхности земли.</p>
<p><math>x_0</math> – это координаты начала аномалии по оси <math>Ox</math>.</p>	<p>0,3</p>
<p><math>x_1</math> – это координаты конца аномалии по оси <math>Ox</math>.</p>	<p>0,4</p>
<p><math>y_0</math> – это координаты начала аномалии по оси <math>Oy</math>.</p>	<p>0,3</p>
<p><math>y_1</math> – это координаты конца аномалии по оси <math>Oy</math>.</p>	<p>0,4</p>
<p><math>\rho_{иточное}</math> – это точное значение плотности аномалии.</p>	<p>-10</p>
<p><math>\rho_{i0}</math> – это начальное приближение плотности аномалии.</p>	<p>-14</p>
<p><math>\rho_{сfresh}</math> – результат решения обратной задачи гравиметрии методом Нелдера-Мида.</p>	<p>-10,0000366210937</p>
<p>абс.погрешность – абсолютная погрешность значения плотности.</p>	<p>3,66E-05</p>
<p>отн.погрешность – относительная погрешность значения плотности.</p>	<p>3,66E-06</p>
<p>погрешность в %</p>	<p>0,000366</p>
<p>Epsilon – точность решения задачи.</p>	<p>0,01</p>
<p>Значение функционала.</p>	<p>5,39E-11</p>

Таблица 15 - Результаты расчетов обратной задачи гравиметрии методом Нелдера-Мида на четвертом слое

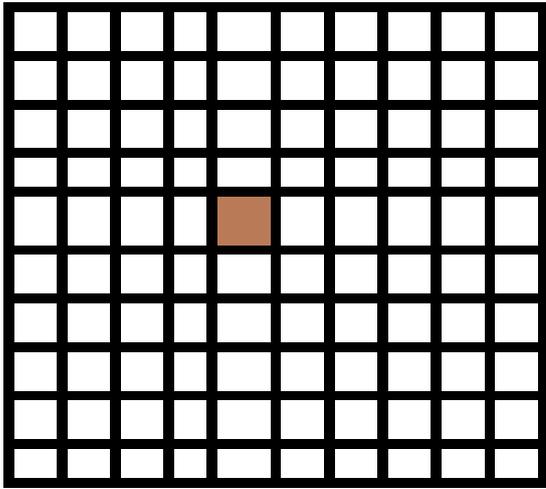
 <p>Расположение аномалии в исследуемой области</p>	<p>ЧЕТВЕРТЫЙ СЛОЙ – это пятый слой от поверхности земли.</p>
<p><math>x_0</math> – это координаты начала аномалии по оси <math>Ox</math>.</p>	<p>0,4</p>
<p><math>x_1</math> – это координаты конца аномалии по оси <math>Ox</math>.</p>	<p>0,5</p>
<p><math>y_0</math> – это координаты начала аномалии по оси <math>Oy</math>.</p>	<p>0,4</p>
<p><math>y_1</math> – это координаты конца аномалии по оси <math>Oy</math>.</p>	<p>0,5</p>
<p><math>\rho_{\text{иточное}}</math> – это точное значение плотности аномалии.</p>	<p>-10</p>
<p><math>\rho_{\text{и0}}</math> – это начальное приближение плотности аномалии.</p>	<p>-14</p>
<p><math>\rho_{\text{иresh}}</math> – результат решения обратной задачи гравиметрии методом Нелдера-Мида.</p>	<p>-10,0000366210937</p>
<p>абс.погрешность – абсолютная погрешность значения плотности.</p>	<p>3,66E-05</p>
<p>отн.погрешность – относительная погрешность значения плотности.</p>	<p>3,66E-06</p>
<p>погрешность в %</p>	<p>0,000366</p>
<p>Epsilon – точность решения задачи.</p>	<p>0,01</p>
<p>Значение функционала.</p>	<p>5,94E-09</p>

Таблица 16 – Результаты расчетов обратной задачи гравиметрии методом Нелдера-Мида на шестом слое

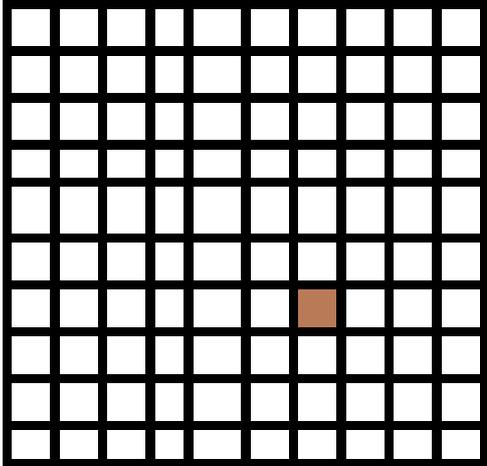
 <p>Расположение аномалии в исследуемой области.</p>	<p>ШЕСТОЙ СЛОЙ – это седьмой слой от поверхности земли.</p>
<p><math>x_0</math> – это координаты начала аномалии по оси <math>Ox</math>.</p>	<p>0,6</p>
<p><math>x_1</math> – это координаты конца аномалии по оси <math>Ox</math>.</p>	<p>0,7</p>
<p><math>y_0</math> – это координаты начала аномалии по оси <math>Oy</math>.</p>	<p>0,6</p>
<p><math>y_1</math> – это координаты конца аномалии по оси <math>Oy</math>.</p>	<p>0,7</p>
<p><math>\rho_{\text{иточное}}</math> – это точное значение плотности аномалии.</p>	<p>-10</p>
<p><math>\rho_{\text{и0}}</math> – это начальное приближение плотности аномалии.</p>	<p>-14</p>
<p><math>\rho_{\text{иresh}}</math> – результат решения обратной задачи гравиметрии методом Нелдера-Мида.</p>	<p>-10,0000366210937</p>
<p>абс.погрешность – абсолютная погрешность значения плотности.</p>	<p>3,66E-05</p>
<p>отн.погрешность – относительная погрешность значения плотности.</p>	<p>3,66E-06</p>
<p>погрешность в %</p>	<p>0,000366</p>
<p>Epsilon – точность решения задачи.</p>	<p>0,01</p>
<p>Значение функционала.</p>	<p>1,02E-10</p>

Таблица 17 – Результаты расчетов обратной задачи гравиметрии методом Нелдера-Мида на седьмом слое

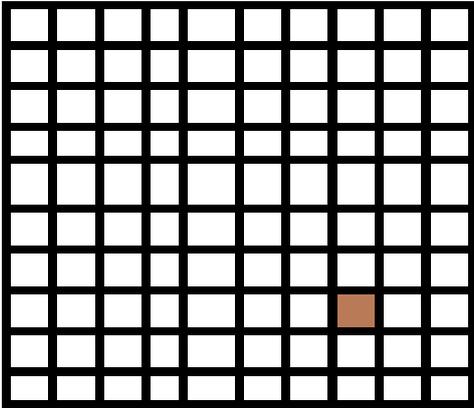
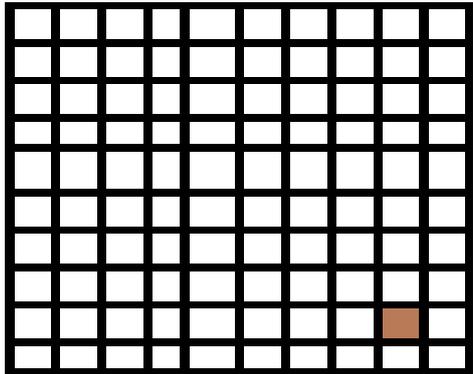
 <p>Расположение аномалии в исследуемой области</p>	<p>СЕДЬМОЙ СЛОЙ – это восьмой слой от поверхности земли.</p>
<p><math>x_0</math> – это координаты начала аномалии по оси Oх.</p>	<p>0,7</p>
<p><math>x_1</math> – это координаты конца аномалии по оси Oх.</p>	<p>0,8</p>
<p><math>y_0</math> – это координаты начала аномалии по оси Oу.</p>	<p>0,7</p>
<p><math>y_1</math> – это координаты конца аномалии по оси Oу.</p>	<p>0,8</p>
<p><math>\rho_{\text{иточное}}</math> – это точное значение плотности аномалии.</p>	<p>-10</p>
<p><math>\rho_{\text{и0}}</math> – это начальное приближение плотности аномалии.</p>	<p>-14</p>
<p><math>\rho_{\text{иresh}}</math> – результат решения обратной задачи гравиметрии методом Нелдера-Мида.</p>	<p>-10,0000366210937</p>
<p>абс.погрешность – абсолютная погрешность значения плотности.</p>	<p>3,66E-05</p>
<p>отн.погрешность – относительная погрешность значения плотности.</p>	<p>3,66E-06</p>
<p>погрешность в %</p>	<p>0,000366</p>
<p>Epsilon – точность решения задачи.</p>	<p>0,01</p>
<p>Значение функционала.</p>	<p>2,74E-10</p>

Таблица 18 – Результаты расчетов обратной задачи гравиметрии методом Нелдера-Мида на восьмом слое

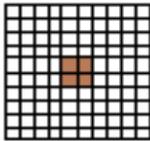
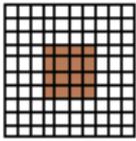
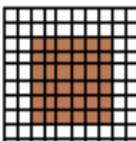
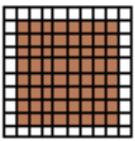
 <p>Расположение аномалии в исследуемой области</p>	<p>ВОСЬМОЙ СЛОЙ – это девятый слой от поверхности земли.</p>
<p><math>x_0</math> – это координаты начала аномалии по оси <math>Ox</math>.</p>	<p>0,8</p>
<p><math>x_1</math> – это координаты конца аномалии по оси <math>Ox</math>.</p>	<p>0,9</p>
<p><math>y_0</math> – это координаты начала аномалии по оси <math>Oy</math>.</p>	<p>0,8</p>
<p><math>y_1</math> – это координаты конца аномалии по оси <math>Oy</math>.</p>	<p>0,9</p>
<p><math>\rho_{\text{иточное}}</math> – это точное значение плотности аномалии.</p>	<p>-10</p>
<p><math>\rho_{\text{и0}}</math> – это начальное приближение плотности аномалии.</p>	<p>-14</p>
<p><math>\rho_{\text{иresh}}</math> – результат решения обратной задачи гравиметрии методом Нелдера-Мида.</p>	<p>-10,0000366210937</p>
<p>абс.погрешность – абсолютная погрешность значения плотности.</p>	<p>3,66E-05</p>
<p>отн.погрешность – относительная погрешность значения плотности.</p>	<p>3,66E-06</p>
<p>погрешность в %</p>	<p>0,000366</p>
<p><math>\epsilon</math> – точность решения задачи.</p>	<p>0,01</p>
<p>Значение функционала.</p>	<p>3,63E-11</p>

Вывод: Плотность очень хорошо восстанавливается. Погрешность восстановления плотности неоднородности 0,0001 %. Восстановление происходит быстро и точно и не зависит от места расположения аномалии. Следовательно, метод Нелдера–Мида очень хорошо восстанавливает плотность аномалии вне зависимости от месторасположения неоднородности.

### 3.5.3 Влияние изменения размеров аномалии

Следующая серия расчетов выполнялась при изменениях размеров аномалии. В частности, аномалии были размером 2 на 2, 4 на 4, 6 на 6, 8 на 8. Таблица 19 аналогичная по структуре с предыдущими таблицами и имеет те же обозначения. Результат расчета программы Psiresh=-10,0000366210937 абсолютно одинаковые везде. Абсолютная погрешность равна  $3,66 \cdot 10^{-5}$ , а относительная погрешность равна  $3,66 \cdot 10^{-6}$ . Что составляет 0,000366% погрешности. Есть не большая разница в порядках значения функционалов (6), но они все около нуля. То есть мы опять получили достаточно хорошее решение задачи.

Таблица 19 – Результаты расчетов обратной задачи гравиметрии методом Нелдера-Мида при изменении размеров аномалии

Обозначения в программе	 2на2	 4на4	 6на6	 8на8
x0	0,4	0,3	0,2	0,1
xn	0,6	0,7	0,8	0,9
y0	0,4	0,3	0,2	0,1
yn	0,6	0,7	0,8	0,9
Psitochnoe	-10	-10	-10	-10
psi0	-14	-14	-14	-14
Psiresh	- 10,0000366210937	- 10,000036621093 7	- 10,000036621093 7	- 10,000036621093 7
абс. погрешность –	3,66E-05	3,662E-05	3,662E-05	3,662E-05
отн. погрешность –	3,66E-06	3,662E-06	3,662E-06	3,662E-06
погрешность в %	0,000366	0,0003662	0,0003662	0,0003662
Epsilon –	0,01	0,01	0,01	0,01
Значение функционал а.	5,94E-09	1,16E-08	2,85E-08	2,90E-08

Вывод: так как расчеты показали, что результаты восстановленной плотности одинаковы везде, то напрашивается вывод: Восстановление плотности при решении обратной задачи гравиметрии методом Нелдера-Мида не зависит от размеров аномалии.

### 3.5.4 Влияние изменения критерия завершения алгоритма на результаты расчетов

Эпсилон это – критерий остановки алгоритма при решении прямой задачи методом верхней релаксации, то есть разница между значениями потенциалов гравитационного поля предыдущего слоя от последующего должна быть меньше эпсилон. Поэтому, собственно, на расчеты его значение влияния не оказывает. Так же в методе Нелдера-Мида в библиотеке Python заложено значение эпсилон по умолчанию для минимизации функционала. Как только значение функционала не превышает эпсилон, поиск минимального значения функционала прекращается. Ранее мы меняли этот параметр эпсилон для минимизации функционала в предшествующей главе, и столкнулись с ситуацией, когда уменьшение этого параметра эпсилон, начиная с некоторого этапа, перестало приводить к уточнению результатов, то есть к уменьшению значения функционала. В данном случае мы продвинулись значительно дальше, не обнаружив предела уточнения результатов, то есть функционал можно минимизировать до бесконечности. Расчеты показали, что изменение эпсилон никак не влияет на точность решения обратной задачи методом Нелдера-Мида. Расчеты проводились до  $10^{*-10}$  и это не предел. Таблицу я не стала приводить так как результаты одинаковые везде.

Вывод: Результаты расчетов не зависят от эпсилон (по крайней мере от эпсилон используемой при решении прямой задачи). Хотя расчеты показали, что ответ считается с относительной погрешностью 0,0001%. Это обусловлено с точностью по умолчанию, заложенной в самом методе. Но эту точность при необходимости можно регулировать. И результаты счета показали, что эпсилон можно брать, как угодно, малым (даже  $10^{*-100}$ ) и вы получите почти точный ответ. Конечно же это дает огромные преимущества методу Нелдера-Мида над другими методами.

### 3.5.5 Влияние выбора начального приближения на результаты расчетов

И последнее мы решили поварьировать начальное приближение. И нашли интересный факт. Оказывается, метод Нелдера-Мида хорошо работает при любом начальном приближении, кроме нуля  $\psi_0 = 0$ . В нуле он не может образовать свой многогранник и «крутиться» около нуля. Проанализируем изменение объема вычислений (числа итераций) в зависимости от начального приближения. Результаты счета показы в таблице 20.

Таблица 20 – Результаты расчетов обратной задачи гравиметрии методом Нелдера-Мида при изменении начального приближения  $\psi_0$

Начальное приближение $\psi_0$	-500	-100	-50	0	50	100	500	734	1730	$10^6$	$10^{10}$
Число итерации	50	46	45	26	46	47	50	50	51	61	74

*Вывод:* Мы выявили слабое влияние начального приближения на конечный результат. Можно брать любое начальное приближение (кроме нуля). Метод Нелдера-Мида обязательно даст Вам достаточно точный ответ, с необходимой точностью. Объем вычисления сильно не меняется в зависимости от начального приближения, так как шаг итерации метода Нелдера-Мида на начальном этапе достаточно большой, что позволяет быстро прийти к точному решению при минимальных итерациях.

Этот метод хорош тем, что работает с  $n$  мерными функционалами. Хотя в сети пишут, что он хорошо работает с  $n \leq 6$ . Моя задача одномерная, и конечно метод Нелдера-Мида с ней с легкостью справился.

### **Выводы по разделу 3**

В третьей главе мы модифицировали математическую постановку обратной задачи гравиметрии, в частности расширили область исследования таким образом, чтобы потенциал гравитационного поля на границах был равен нулю. В связи с расширением границ, значение градиента гравитационного поля полученные на месторождении оказались внутри исследуемой области, а не на ее границе. Это существенно изменило все математические выкладки. Все предыдущие выкладки были пересчитаны с учетом этой особенности. Конечно, минимизируемый функционал тоже преобразовался в другой вид. Доказали единственность решения оптимизационной задачи за счет строгой выпуклости минимизируемого функционала. Вывели производную Гато функционала и сопряженную задачу для оптимизационной задачи. Сопряженная задача содержала производную от дельты функции. В этом случае градиентный метод решения оптимизационной задачи не применим. Выбрали метод Нелдера-Мида для решения оптимизационной задачи. Дали описание метода Нелдера-Мида. Провели подробное исследование различных расположении аномалии в исследуемой области, нашли взаимосвязь между расположением аномалии, размерами аномалии и восстановлением плотности аномалии. Провели оценку точности решения обратной задачи гравиметрии на модельных данных методом Нелдера-Мида. Проанализировали влияние начального приближения на результаты счета. На основе полученной математической модели и анализа модельных данных была решена обратная задача приближенная к реальности на модельных данных.

По результатам главы 3 по решению уточненной обратной задачи мною было опубликовано 2 тезиса: Постановка обратной задачи гравиметрии на реальных данных [8, с. 30], Formulation of the gravimetry inverse problem for real data (Одиннадцатая международная молодежная научная школа-конференция «Теория и численные методы решения обратных и некорректных задач» Новосибирск, Академгородок, август 2019) [9, с. 58].

В результате мы решили обратную задачу гравиметрии, более реалистичную по сравнению с той, что рассматривалась в главе 2. В

заключительной главе 4 диссертации мы будем решать задачу с двумя аномалиями.

## 4 ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ГРАВИМЕТРИИ С ДАННЫМИ НА ВНУТРЕННЕЙ ПОВЕРХНОСТИ С ДВУМЯ НЕОДНОРОДНОСТЯМИ

В реальности неоднородность имеет весьма сложную конфигурацию. Поэтому естественное направление дальнейших исследований – усложнить ее форму.

В этой главе мы рассмотрим новую постановку задачи с двумя неоднородностями и найдем пути решения обратной задачи гравиметрии с данными на внутренней границе методом Нелдера-Мида. Идею решения обратной задачи гравиметрии с данными на внутренней границе, рассмотренную в главе 3, мы распространим для случая двух неоднородностей, месторасположение которых нам известно, и повторим все аналогичные процедуры решения поставленной задачи.

### 4.1 Постановка обратной задачи гравиметрии на модельных данных со значениями градиента гравитационного поля на внутренней границе с двумя неоднородностями

Как описано в главе 3, мы расширяем исследуемую область  $\Omega$  во все четыре стороны таким образом, чтобы гравитационное поле аномалии на границах была равна нулю. Так мы получим расширенные искусственные нулевые границы. Для простоты будем считать, что мы расширяем область во все стороны на одинаковое расстояние  $P$ . Тогда по оси  $Ox$  мы имеем от 0 до  $2*P+L$ . По оси  $Oy$  мы имеем от  $-M-P$  до  $P$ . Это будут в дальнейшем пределы интегрирования области.

Математически получается уравнение Пуассона с нулевыми граничными условиями и дополнительным условием на отрезке, расположенной во внутренней части исследуемой области (значения показания гравиметрами градиента гравитационного поля на отрезке НК).

$$\Delta \eta(x, y) = -4\pi G\psi(x, y), \quad (4.1)$$

$$\eta(x, y)|_{\partial\Omega'} = 0, \quad (4.2)$$

$$\left. \frac{\partial \eta(x, y)}{\partial y} \right|_{NK} = \eta_2(x), \quad (4.3)$$

$$\psi(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{вне } \Omega_1 \text{ и } \Omega_2 \\ \psi_1, & \text{в } \Omega_1 \\ \psi_2, & \text{в } \Omega_2 \end{cases}. \quad (4.4)$$

Формула (4.1) описывает уравнение состояния потенциала гравитационного поля через уравнение Пуассона с нулевыми граничными условиями (4.2) на границах расширенной области  $\Omega'$ . Уравнение (4.3) дополнительное условие (измеренные значения на гравиметрах градиента гравитационного поля). Равенство (4.4) задает плотности аномалии, где  $\psi_1$  и  $\psi_2$  – это разности плотностей аномалии и плотности окружаемого грунта.

Подчеркнем, что месторасположение областей аномалии  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$  нам точно известны.

Постановка обратной задачи формулируется следующим образом: необходимо определить значение плотности аномалии  $\psi(x, y)$  в исследуемой расширенной области  $\Omega'$  при известных значениях градиента гравитационного поля  $\eta_2(x)$  на отрезке  $NK$  (рисунок 13).

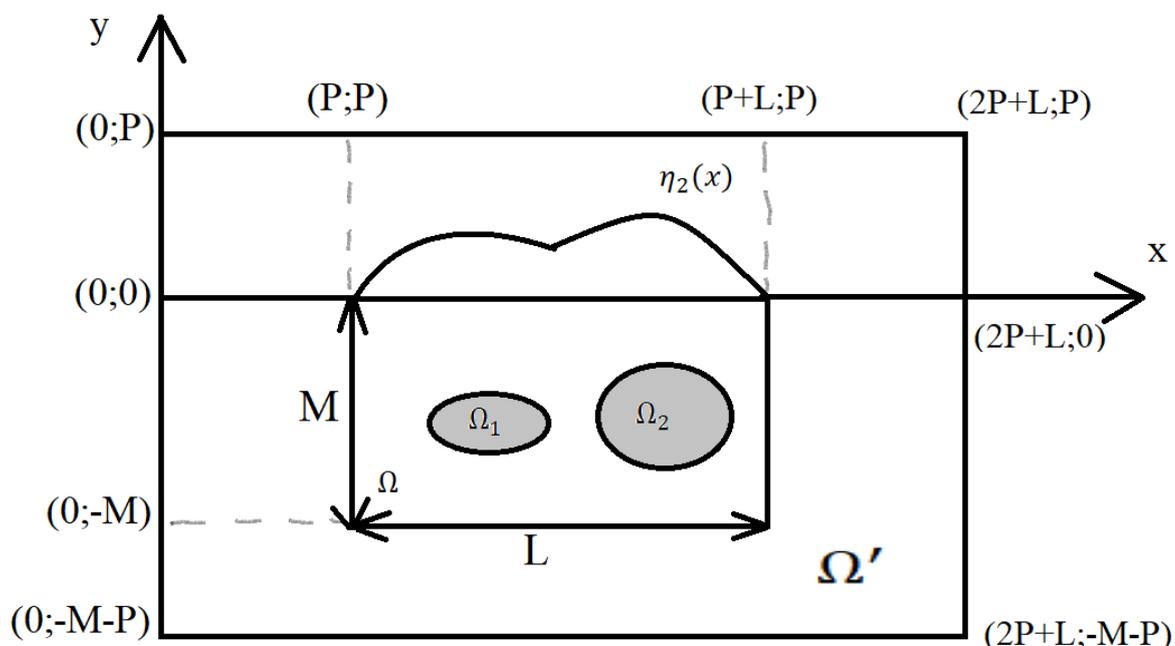


Рисунок 13 – Расширенная исследуемая область с двумя аномалиями

Для решения обратной задачи необходимо заменить ее на оптимизационную задачу. Для этого вводим функционал вида (4.6) – это квадратичное отклонение значения вертикальных составляющих градиента гравитационного поля от измеренных показаний гравиметров.

$$I(\psi_1, \psi_2) = \int_N^K \left( \left. \frac{\partial \eta(x, y)}{\partial y} \right|_{NK} - \eta_2(x) \right)^2 dx \rightarrow \min. \quad (4.6)$$

Следовательно, оптимизационная задача формулируется следующим образом: требуется найти величину  $(\psi_1, \psi_2)$  из условия минимума функционала (4.6), где  $(\psi_1, \psi_2)$  имеет вид (4.4).

Теорема 5:

Функционал (4.6) является строго выпуклым, где  $(\psi_1, \psi_2)$  – разность плотностей аномалии и окружающей среды.

Теорема 6:

Задача минимизации функционала (4.6) не может иметь двух решений.

Теоремы мы привели без доказательств, потому что, у нас ни уравнения, ни функционал не изменились по сравнению с Главой 3. Тем самым доказательство этого утверждения полностью повторяют единственности из предыдущей главы.

4.2 Вывод градиента функционала и сопряженной задачи для новой постановки с двумя аномалиями

Теорема 7:

Производная функционала  $I$  в точке  $(\psi_1, \psi_2)$  равна:

$$I_*'(\psi_1, \psi_2) = \begin{cases} 0, & \text{вне } \Omega_1 \text{ и } \Omega_2 \\ 4\pi G \iint_{\Omega_1} p(x, y) dx dy, & \text{в } \Omega_1, \\ 4\pi G \iint_{\Omega_2} p(x, y) dx dy, & \text{в } \Omega_2 \end{cases}$$

где  $p(x, y)$  решение сопряженной системы имеющий следующий вид:

$$\Delta p(x, y) = \alpha(x) \frac{\partial}{\partial y} \left( 2 \left( \frac{\partial \eta(x, 0)}{\partial y} - \eta_2(x) \right) \delta(y) \right), \quad (4.11)$$

$$\begin{aligned} p(0; y) &= 0, \\ p(2P + L; y) &= 0, \\ p(x; -M - P) &= 0, \\ p(x; P) &= 0. \end{aligned}$$

Вычислим градиент функционала, если он существует. Воспользуемся определением производной Гато:

$$(I'(\psi_1, \psi_2), h) = \lim_{\sigma \rightarrow 0} \left( \frac{I((\psi_1, \psi_2) + \sigma(h_1, h_2)) - I(\psi_1, \psi_2)}{\sigma} \right).$$

Так как функционал связан с плотностью  $(\psi_1, \psi_2)$  через уравнение состояния потенциала поля (4.1), то введем дополнительные обозначения.

Пусть плотность  $(\psi_1, \psi_2)$  переводит потенциал поля (4.1) в  $v(x, y)$ , а плотность  $(\psi_1, \psi_2) + \sigma(h_1, h_2)$  переводит потенциал поля (4.1) в  $q(x, y)$ , то есть

$$\begin{aligned} (\psi_1, \psi_2) &\rightarrow v(x, y), \\ (\psi_1, \psi_2) + \sigma(h_1, h_2) &\rightarrow q(x, y). \end{aligned}$$

Тогда

$$I_*(\psi_1, \psi_2) = \int_N^K \left( \frac{\partial v(x, 0)}{\partial y} - \eta_2(x) \right)^2 dx.$$

$$I_*((\psi_1, \psi_2) + \sigma(h_1, h_2)) = \int_N^K \left( \frac{\partial q(x,0)}{\partial y} - \eta_2(x) \right)^2 dx.$$

Обозначим приращение функционала через:

$$\begin{aligned} \Delta I_*(\psi_1, \psi_2) &= I_*((\psi_1, \psi_2) + \sigma(h_1, h_2)) - I_*(\psi_1, \psi_2) = \\ &= \int_N^K \left[ \left( \frac{\partial q(x,0)}{\partial y} - \eta_2(x) \right)^2 - \left( \frac{\partial v(x,0)}{\partial y} - \eta_2(x) \right)^2 \right] dx = \\ &= \int_N^K \left( \frac{\partial q(x,0)}{\partial y} + \frac{\partial v(x,0)}{\partial y} - 2\eta_2(x) \right) \left( \frac{\partial q(x,0)}{\partial y} - \frac{\partial v(x,0)}{\partial y} \right) dx. \end{aligned}$$

Обозначим  $q(x,0) - v(x,0) = \eta(x,0)$ , отсюда  $q(x,0) = v(x,0) + \eta(x,0)$ , тогда

$$\frac{\partial \eta(x,0)}{\partial y} = \frac{\partial q(x,0)}{\partial y} - \frac{\partial v(x,0)}{\partial y} \text{ и } \frac{\partial q(x,0)}{\partial y} = \frac{\partial v(x,0)}{\partial y} + \frac{\partial \eta(x,0)}{\partial y}.$$

Тогда приращение функционала равно:

$$\Delta I_*(\psi_1, \psi_2) = \int_N^K 2 \left( \frac{\partial v(x,0)}{\partial y} - \eta_2(x) \right) \frac{\partial \eta(x,0)}{\partial y} dx + \int_N^K \left( \frac{\partial \eta(x,0)}{\partial y} \right)^2 dx.$$

В итоге получилось:

$$\begin{aligned} I_*((\psi_1, \psi_2) + \sigma(h_1, h_2)) - I_*(\psi_1, \psi_2) &= \int_N^K 2 \left( \frac{\partial v(x,0)}{\partial y} - \eta_2(x) \right) \frac{\partial \eta(x,0)}{\partial y} dx + \\ &+ \int_N^K \left( \frac{\partial \eta(x,0)}{\partial y} \right)^2 dx. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Далее мы должны посчитать

$$(I_*'(\psi_1, \psi_2), (h_1, h_2)) = \lim_{\sigma \rightarrow 0} \frac{I_*((\psi_1, \psi_2) + \sigma(h_1, h_2)) - I_*(\psi_1, \psi_2)}{\sigma},$$

но уравнение (4.12) не зависит от  $\sigma$  явным образом.  $\sigma$  связано с уравнением (4.12) через уравнение состояние системы (4.12) (для нашей постановки задачи — это потенциал гравитационного поля).

Мы уже ранее вводили обозначение

$$\begin{aligned} (\psi_1, \psi_2) &\rightarrow v(x, y), \\ (\psi_1, \psi_2) + \sigma(h_1, h_2) &\rightarrow q(x, y). \end{aligned}$$

Это значит, плотности  $(\psi_1, \psi_2)$  соответствует потенциал гравитационного поля, описываемый функцией  $v(x, y)$ . Аналогично для плотности поля  $(\psi_1, \psi_2) + \sigma(h_1, h_2)$  соответствует поля потенциалом  $q(x, y)$ .

Распишем постановку задачи (4.1) - (4.5) через две функции  $q(x, y)$  и  $v(x, y)$ .

$$\begin{aligned} \Delta v(x, y) &= -4\pi\psi(\psi_1, \psi_2)G, & \Delta q(x, y) &= -4\pi\psi((\psi_1, \psi_2) + \sigma(h_1, h_2))G, \\ v(x, y)|_{\partial\Omega'} &= 0, & q(x, y)|_{\partial\Omega'} &= 0, \\ \psi(\psi_1, \psi_2) &= \begin{cases} 0, & \text{вне } \Omega_1 \text{ и } \Omega_2 \\ \psi_1, & \text{в } \Omega_1 \\ \psi_2, & \text{в } \Omega_2 \end{cases} & \psi((\psi_1, \psi_2) + \sigma(h_1, h_2)) &= \begin{cases} 0, & \text{вне } \Omega_1 \text{ и } \Omega_2 \\ \psi_1 + \sigma h_1, & \text{в } \Omega_1 \\ \psi_2 + \sigma h_2, & \text{в } \Omega_2 \end{cases} \end{aligned}$$

Теперь отнимем эти два уравнения друг от друга и введем обозначение  $\eta(x, y) = q(x, y) - v(x, y)$ . Тогда уравнение примет вид:

$$\Delta \eta(x, y) = -4\pi G [\psi((\psi_1, \psi_2) + \sigma(h_1, h_2)) - \psi(\psi_1, \psi_2)].$$

Обозначим  $[\psi((\psi_1, \psi_2) + \sigma(h_1, h_2)) - \psi(\psi_1, \psi_2)] = \tilde{\psi}(h_1, h_2)$  тогда

$$\begin{aligned} \Delta \eta(x, y) &= -4\pi G \tilde{\psi}(h_1, h_2), \\ \eta(x, y)|_{\partial\Omega'} &= 0, \end{aligned} \tag{4.13}$$

где  $\partial\Omega'$  граница всей исследуемой расширенной области

$$\tilde{\psi}(h_1, h_2) = \begin{cases} 0, & \text{вне } \Omega_1 \text{ и } \Omega_2 \\ \sigma h_1, & \text{в } \Omega_1 \\ \sigma h_2, & \text{в } \Omega_2 \end{cases}.$$

Уравнение (4.13) искусственно умножаем на  $\lambda$  -любое. И интегрируем по  $Ox$  и по  $Oy$  по расширенной области  $\Omega'$ , поскольку уравнение у нас определено в расширенной области. Однако вне неоднородностей у нас проварьированные и непроварьированные выражения — одни и те же. Тогда при вычислении производной функционала они сократятся.

$$\begin{aligned} & \iint_{0, -M-P}^{2P+L, P} \lambda(x, y) \frac{\partial^2 \eta(x, y)}{dx^2} dx dy \\ + & \iint_{0, -M-P}^{2P+L, P} \lambda(x, y) \frac{\partial^2 \eta(x, y)}{dy^2} dx dy = -4\pi G \iint_{0, -M-P}^{2P+L, P} \lambda(x, y) \tilde{\psi} dx dy = \\ & = -4\pi G \sigma h \iint_{0, -M-P}^{2P+L, P} \lambda(x, y) dx dy. \end{aligned} \tag{4.14}$$

Первый двойной интеграл в уравнений (4.14) обозначим через  $I_{1*}$  и проинтегрируем по частям два раза.

$$\begin{aligned}
 I_{1*} &= \iint_{0, -M-P}^{2P+L, P} \lambda(x, y) \frac{\partial^2 \eta(x, y)}{dx^2} dx dy = \\
 &= \int_{-M-P}^P \left( \lambda(x, y) \frac{\partial \eta(x, y)}{dx} \Big|_0^{2P+L} - \int_0^{2P+L} \frac{\partial \eta(x, y)}{\partial x} \frac{\partial \lambda(x, y)}{\partial x} dx \right) dy = \\
 &= \int_{-M-P}^P \left( \lambda(x, y) \frac{\partial \eta(x, y)}{\partial x} \Big|_0^{2P+L} - \frac{\partial \lambda(x, y)}{\partial x} \eta(x, y) \Big|_0^{2P+L} \right. \\
 &\quad \left. + \int_0^{2P+L} \eta(x, y) \frac{\partial^2 \lambda(x, y)}{\partial x^2} dx \right) dx.
 \end{aligned}$$

Это слагаемое  $\frac{\partial \lambda(x, y)}{\partial x} \eta(x, y) \Big|_0^{2P+L}$  равно нулю, так как на границе области  $\eta(x, y)$  равно нулю. Тогда

$$I_{1*} = \int_{-M-P}^P \left( \lambda(x, y) \frac{\partial \eta(x, y)}{\partial x} \Big|_0^{2P+L} + \int_0^{2P+L} \eta(x, y) \frac{\partial^2 \lambda(x, y)}{\partial x^2} dx \right) dy.$$

Аналогично второй двойной интеграл в уравнений (4.14) обозначим через  $I_{2*}$  и проинтегрируем по частям два раза.

$$\begin{aligned}
 I_{2*} &= \iint_{0, -M-P}^{2P+L, P} \lambda(x, y) \frac{\partial^2 \eta(x, y)}{dy^2} dx dy = \\
 &= \int_0^{2P+L} \left( \lambda(x, y) \frac{\partial \eta(x, y)}{dy} \Big|_{-M-P}^P - \int_{-M-P}^P \frac{\partial \eta(x, y)}{\partial y} \frac{\partial \lambda(x, y)}{\partial y} dy \right) dx = \\
 &= \int_0^{2P+L} \left( \lambda(x, y) \frac{\partial \eta(x, y)}{\partial y} \Big|_{-M-P}^P - \frac{\partial \lambda(x, y)}{\partial y} \eta(x, y) \Big|_{-M-P}^P \right. \\
 &\quad \left. + \int_{-M-P}^P \eta(x, y) \frac{\partial^2 \lambda(x, y)}{\partial y^2} dy \right) dx.
 \end{aligned}$$

Это слагаемое  $\frac{\partial \lambda(x, y)}{\partial y} \eta(x, y) \Big|_{-M-P}^P$  равно нулю, так как на границе области  $\eta(x, y)$  равно нулю. Тогда

$$I_{2*} = \int_0^{2P+L} \left( \lambda(x, y) \frac{\partial \eta(x, y)}{\partial y} \Big|_{-M-P}^P + \int_{-M-P}^P \eta(x, y) \frac{\partial^2 \lambda(x, y)}{\partial y^2} dy \right) dx.$$

Найденные  $I_{1*}, I_{2*}$  подставим в уравнение (4.14), получим:

$$\begin{aligned}
& \iint_{0, -M-P}^{2P+L, P} \eta(x, y) \Delta \lambda(x, y) dx dy \\
& + \int_0^{2P+L} \lambda(x, y) \frac{\partial \eta(x, y)}{\partial y} \Big|_{y=-M-P} dx \\
& - \int_0^{2P+L} \lambda(x, y) \frac{\partial \eta(x, y)}{\partial y} \Big|_{y=P} dx + \int_{-M-P}^P \lambda(x, y) \frac{\partial \eta(x, y)}{\partial x} \Big|_0^{2P+L} dy = \\
& = -4\pi G \iint_{0, -M-P}^{2P+L, P} \lambda(x, y) \tilde{\psi}(h_1, h_2) dx dy = \\
& = \begin{cases} -4\pi G \sigma h_1 \iint_{\Omega_1} \lambda(x, y) dx dy, & \text{в } \Omega_1 \\ -4\pi G \sigma h_2 \iint_{\Omega_2} \lambda(x, y) dx dy, & \text{в } \Omega_2 \end{cases} \quad \forall \lambda(x, y). \quad (4.15)
\end{aligned}$$

Наша цель заключалась в выявлении  $\sigma$  явным образом из уравнения (4.7), что бы в дальнейшем разделить его на  $\sigma$  и перейти к пределу, таким образом получив производную Гаусса. В уравнении (4.10)  $\sigma$  выявлена явным образом. В связи с этим необходимо как-то связать уравнение (4.10) и (4.7).

Так как  $\forall \lambda$  любое, мы можем его подобрать так, чтобы уравнение (4.10) было равно уравнению (4.7). Так как значения градиента гравитационного поля, измеряемого гравиметром, расположены внутри исследуемой области, а не на границе, следовательно, это даст отклик в сопряженной задаче на внутреннюю область. Тогда можно считать, что на границах в сопряженной задаче тоже нули, аналогично как в постановке задачи. Отсюда получаем нулевые граничные условия сопряженной задачи. И по аналогии с предыдущими задачами пере обозначим  $\lambda(x, y) = p(x, y)$ .

$$\begin{aligned}
p(0; y) &= 0, \\
p(2P + L; y) &= 0, \\
p(x; -M - P) &= 0, \\
p(x; P) &= 0.
\end{aligned}$$

Теперь необходимо вывести уравнение состояния для сопряженной задачи. Будем отталкиваться от уравнения (4.7). Напомним, как оно выглядит. Второе слагаемое мы не учитываем, так как там содержится  $\sigma$  в квадрате, после деления на  $\sigma$  и перехода к пределу второе слагаемое станет равно нулю.

$$I_*(\psi_1, \psi_2) + \sigma(h_1, h_2) - I_*(\psi_1, \psi_2) =$$

$$= \int_N^K 2 \left( \frac{\partial v(x,0)}{\partial y} - \eta_2(x) \right) \frac{\partial \eta(x,0)}{\partial y} dx + \int_N^K \left( \frac{\partial \eta(x,0)}{\partial y} \right)^2 dx. \quad (4.7)$$

Наша цель преобразовать первое слагаемое в двойной интеграл, что бы можно было найти аналогию со слагаемым с двойным интегралом из (4.10). Как преобразовать (4.7) в двойной интеграл?

Так как уравнение (4.7) не зависит от  $y$ , мы преобразуем соответствующее слагаемое, пользуясь определением дельта-функции от  $y$  ( $\delta(y)$ ). Далее интегрируем по  $y$  по всей исследуемой области.

$$\begin{aligned} & \int_N^K 2 \left( \frac{\partial v(x,0)}{\partial y} - \eta_2(x) \right) \frac{\partial \eta(x,0)}{\partial y} dx = \\ & = \iint_{-M-P,N}^{P,K} 2 \left( \frac{\partial v(x,0)}{\partial y} - \eta_2(x) \right) \frac{\partial \eta(x,0)}{\partial y} * \delta(y) dx dy. \end{aligned}$$

Далее расширим отрезок  $NK$  до границы исследуемой области. Возьмем функцию  $\alpha(x) = \begin{cases} 0, & x \notin [N; K] \\ 1, & x \in [N; K] \end{cases}$

$$\iint_{-M-P,0}^{P,2P+L} 2 \left( \frac{\partial v(x,0)}{\partial y} - \eta_2(x) \right) \frac{\partial \eta(x,0)}{\partial y} * \delta(y) * \alpha(x) dx dy.$$

Так как в уравнении (4.10) нам нужно  $\eta(x,y)$  в «чистом» виде (без производной), то мы будем интегрировать по частям.

$$\begin{aligned} & \iint_{-M-P,0}^{P,2P+L} 2 \left( \frac{\partial v(x,0)}{\partial y} - \eta_2(x) \right) \frac{\partial \eta(x,0)}{\partial y} * \delta(y) * \alpha(x) dx dy = \\ & = \int_0^{2P+L} \alpha(x) \int_{-M-P}^P 2 \left( \frac{\partial v(x,0)}{\partial y} - \eta_2(x) \right) \delta(y) \frac{\partial \eta(x,0)}{\partial y} dy dx. \end{aligned}$$

Первое слагаемое равно нулю, так как на границах нули. Второе слагаемое равно:

$$- \iint_{-M-P,0}^{P,2P+L} \alpha(x) * \frac{\partial}{\partial y} \left( 2 \left( \frac{\partial v(x,0)}{\partial y} - \eta_2(x) \right) \delta(y) \right) * \eta(x,y) dx dy.$$

Сравниваем полученное с уравнением (4.10) и в качестве  $\lambda(x,y)$  выбираем  $p(x,y)$  - решение сопряженной системы:

$$\Delta p(x, y) = \alpha(x) \frac{\partial}{\partial y} \left( 2 \left( \frac{\partial \eta(x, 0)}{\partial y} - \eta_2(x) \right) \delta(y) \right).$$

Таким образом, мы получили сопряженную задачу (уравнение Пуассона с четырьмя нулевыми граничными условиями). Решим эту сопряженную систему. Найдем  $p(x, y)$ . Тогда вычислим разность значений функционала:

$$\begin{aligned} I_*((\psi_1, \psi_2) + \sigma(h_1, h_2)) - I_*(\psi_1, \psi_2) &= \\ &= 4\pi G \sigma(h_1, h_2) \iint_{\Omega'} p(x, y) dx dy + \int_0^L \left( \frac{\partial \eta(x, 0)}{\partial y} \right)^2 dx. \end{aligned}$$

Делим на  $\sigma$  и переходим к пределу при  $\sigma$  стремящемся к нулю

$$\begin{aligned} (I_*'(\psi_1, \psi_2), (h_1, h_2)) &= \\ &= \lim_{\sigma \rightarrow 0} \left( \frac{I_*((\psi_1, \psi_2) + \sigma(h_1, h_2)) - I_*(\psi_1, \psi_2)}{\sigma} \right) \\ &= 4\pi G \iint_{\Omega'} p(x, y) dx dy * (h_1, h_2) \\ &= 4\pi G \iint_{\Omega_1} p(x, y) dx dy * h_1 + 4\pi G \iint_{\Omega_2} p(x, y) dx dy * h_2. \end{aligned}$$

Следовательно, производная Гато равно:

$$I_*'(\psi_1, \psi_2) = \begin{cases} 0, & \text{вне } \Omega_1 \text{ и } \Omega_2 \\ 4\pi G \iint_{\Omega_1} p(x, y) dx dy, & \text{в } \Omega_1 \\ 4\pi G \iint_{\Omega_2} p(x, y) dx dy, & \text{в } \Omega_2 \end{cases}.$$

Замечание:

Это слагаемое  $\int_0^L \left( \frac{\partial \eta(x, 0)}{\partial y} \right)^2 dx$  равно нулю (при делении на  $\sigma$  и перехода к пределу при  $\sigma$  стремящемся к нулю), так как интеграл второй степени и  $\sigma$  выходит в квадрате из-под интеграла и при делении на  $\sigma$ , одно  $\sigma$  остается. За

счет того, что  $\sigma$  стремиться к нулю, все это выражение будет стремиться к нулю.

Производная Габо существует и найдена. Что и требовалось доказать по теореме 7.

Сложность данной постановки задачи заключается в уравнении состоянии сопряженной задачи. А именно, правая часть уравнения (4.11) содержит производную от дельты-функции. С производной от дельты-функции не понятно, как работать и как вычислять численно производную от дельты-функции.

### 4.3 Анализ результатов с двумя аномалиями

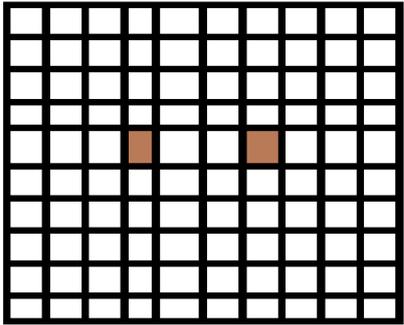
Общая схема анализа результатов используется такая же, как и в предшествующих главах. В этой главе мы предоставили анализ основного варианта счета, влияние изменения месторасположения аномалии, влияние изменения размеров двух аномалии, влияние изменения критерия завершения алгоритма, влияние выбора начального приближения.

Исследуемый квадрат размером 1 на 1. Аномалии разных размеров. Мы считаем значение плотности аномалии везде одинаковое, например -5 и -5. Так как берется разность плотностей аномалии с внешним грунтом, то значение плотности отрицательное.

#### 4.3.1 Основной вариант счета

Для решения обратной задачи гравиметрии с двумя аномалиями требуется многократное решение прямой задачи. Напомню, что решение прямой задачи — это расчет градиента гравитационного поля на поверхности исследуемой области с учетом известных плотностей аномалии и их месторасположения. Потом мы забываем о точных значениях плотностей ( $\psi_1, \psi_2$ ) и берем любое значение плотности  $\psi$  (двумерный вектор) за начальное приближение. Далее используя решения прямой задачи для точного ( $\psi_1, \psi_2$ ) мы строим минимизируемый функционал. То есть считаем квадратичную разность между решением прямой задачи (с использованием начального приближения плотности) и решением прямой задачи для точного ( $\psi_1, \psi_2$ ). Далее функционал минимизируем методом Нелдера-Мида. Результаты счета показаны в таблице 11. На рисунке слева в таблице 21 показано расположение аномалии.  $\text{Psiresh} = (-4,999978; -5,0000053)$  результат расчета программы (это найденное значение плотности ( $\psi_1, \psi_2$ )). Напомню, что точное решение ( $\psi_1, \psi_2$ ) = (-5; -5). Абсолютная погрешность равна  $(2,17 * 10^{-5}; 5,32 * 10^{-6})$ , а относительная погрешность равна  $(4,34 * 10^{-6}; 1,065 * 10^{-6})$ . Что составляет  $(0,000004\%; 0,000001\%)$  погрешности. Значение функционала (4.6) равно  $3,87 * 10^{-12}$ , это почти нуль. То есть мы получили очень хорошее решение задачи.

Таблица 21 - Результаты расчетов обратной задачи гравиметрии методом Нелдера-Мида для двух аномалии

 <p>Рисунок – Расположение двух аномалии в исследуемой области.</p>	-
c1x – это координаты начала аномалии 1 по оси Ox.	0,3
d1x – это координаты конца аномалии 1 по оси Ox.	0,4
c1y – это координаты начала аномалии 1 по оси Oy.	0,4
d1y – это координаты конца аномалии 1 по оси Oy.	0,5
c2x – это координаты начала аномалии 2 по оси Ox.	0,3
d2x – это координаты конца аномалии 2 по оси Ox.	0,4
c2y – это координаты начала аномалии 2 по оси Oy.	0,4
d2y – это координаты конца аномалии 2 по оси Oy.	0,5
Psiточное – это точное значение плотности аномалии.	(-5; -5)
psi0 – это начальное приближение плотности аномалии.	(-1; -4)
Psiresh – результат решения обратной задачи гравиметрии методом Нелдера-Мида.	(-4,999978; -5,0000053)
абс.погрешность – абсолютная погрешность значения плотности.	(2,17 * 10 <sup>-5</sup> ; 5,32 * 10 <sup>-6</sup> )
отн.погрешность – относительная погрешность значения плотности.	(4,34 * 10 <sup>-6</sup> ; 1,065 * 10 <sup>-6</sup> )
погрешность в %	(0,000004%; 0,000001%)
Epsilon – точность решения задачи.	0,0000000001
Значение функционала.	3,87 * 10 <sup>-12</sup>

Вывод: Метод Нелдера-Мида решает обратную задачу гравиметрии с данными на внутренней границе для двух аномалии с точностью до (0,000004%; 0,000001%).

Проверяя программу на чувствительность к изменяющимся параметрам, мы провели ряд расчетов.

#### 4.3.2 Влияние изменения месторасположения двух аномалии

Исследуемая область имеет форму квадрата с размерами от 0 до 1. Аномалии имеют одинаковые размеры 0,1 на 0,1. В процессе решения я проверила расположение аномалии в различных позициях друг от друга. А именно: 1) расположение первой аномалии слева, второй справа; 2) первая аномалия сверху, вторая снизу; 3) расположение аномалии по диагонали; 4) близкое расположение аномалии друг к другу; 5) далекое расположение аномалии друг от друга; 6) близкое расположение аномалии к границам исследуемой области. Результаты расчетов везде одинаковые, как в таблице 1. Значения восстановленных плотностей абсолютно одинаковые при любых расположениях аномалии. Абсолютная и относительная погрешность тоже везде одинаковая. Есть небольшая разница в значениях функционала, но они все почти равны нулю.

*Вывод:* Плотности двух аномалии очень хорошо восстанавливаются. Погрешность восстановления плотностей неоднородностей (0,000004%; 0,000001%). Восстановление происходит быстро и точно и не зависит от места расположения аномалии. Следовательно, метод Нелдера–Мида очень хорошо восстанавливает плотности аномалии вне зависимости от месторасположения неоднородности.

#### 4.3.3 Влияние изменения размеров двух аномалии

Следующая серия расчетов выполнялась при изменениях размеров аномалии. В частности, аномалии были размером 0,1 на 0,1 и 0,4 на 0,4. Таблица 9 из главы 3 аналогичная по структуре с предыдущими таблицами и имеет те же обозначения. Результат расчета программы  $\Psi_{resh} = (-5,000036; -4,999988)$  абсолютно одинаковые везде (точное решение  $(-5; -5)$ ). Абсолютная погрешность равна  $(3,628 * 10^{-5}; 1,13 * 10^{-5})$ , а относительная погрешность равна  $(7,25 * 10^{-6}; 2,26 * 10^{-6})$ . Что составляет (0,00004%; 0,00001%) погрешности. Есть небольшая разница в порядках значения функционалов (4.6), но они все около нуля. То есть мы опять получили достаточно хорошее решение задачи.

Вывод: так как расчеты показали, что результаты восстановленной плотности одинаковы везде, то напрашивается вывод: Восстановление плотности при решении обратной задачи гравиметрии методом Нелдера-Мида не зависит от размеров аномалии и от значения самой плотности.

#### 4.3.4 Влияние изменения критерия завершения алгоритма на результаты расчетов

Эпсилон это – критерий остановки алгоритма при решении прямой задачи методом верхней релаксации, то есть разница между значениями потенциалов гравитационного поля предыдущего слоя от последующего должна быть меньше эпсилон. Поэтому, собственно, на расчеты его значение влияния не оказывает. Так же в методе Нелдера-Мида в библиотеке Python заложено значение эпсилон по умолчанию для минимизации функционала. Как только значение функционала не превышает эпсилон, поиск минимального значения функционала прекращается. Ранее мы меняли этот параметр эпсилон для минимизации функционала в предшествующей главе, и столкнулись с ситуацией, когда уменьшение этого параметра эпсилон, начиная с некоторого этапа, перестало приводить к уточнению результатов, то есть к уменьшению значения функционала. В данном случае мы продвинулись значительно дальше, не обнаружив предела уточнения результатов. Расчеты показали, что изменение эпсилон никак не влияет на точность решения обратной задачи методом Нелдера-Мида. Расчеты проводились до  $10^{**}(-10)$  и это не предел. Таблицу я не стала приводить, так как результаты одинаковые везде как в таблице 11.

*Вывод:* Результаты расчетов не зависят от эпсилон (по крайней мере от эпсилон используемой при решении прямой задачи). Хотя расчеты показали, что ответ считается с относительной погрешностью 0,0001%. Это обусловлено точностью по умолчанию, заложенной в самом методе Нелдера-Мида. Но эту точность при необходимости можно регулировать. И результаты счета показали, что эпсилон можно брать, как угодно, малым (даже  $10^{**}(-100)$ ) и вы получите почти точный ответ. Конечно же это дает огромные преимущества методу Нелдера-Мида над другими методами.

#### 4.3.5 Влияние выбора начального приближения на результаты расчетов

Аналогично расчетам третьей главы мы решили поварьировать начальное приближение. Результаты оказались аналогичными, метод Нелдера-Мида хорошо работает при любом начальном приближении, кроме нуля ( $\psi_0 = 0$ ). В нуле он не может образовать свой многогранник и «крутиться» около нуля.

*Вывод:* Мы выявили слабое влияние начального приближения на конечный результат. Можно брать любое начальное приближение (кроме нуля). Метод Нелдера-Мида обязательно даст Вам достаточно точный ответ, с необходимой точностью. Объем вычисления сильно не меняется в зависимости от начального приближения, так как шаг итерации метода Нелдера-Мида на начальном этапе достаточно большой, что позволяет быстро прийти к точному решению при минимальных итерациях.

#### **Выводы по разделу 4**

В четвертой главе мы усложнили постановку задачи изменив количество аномалии, в частности теперь две аномалии. Это существенно не изменило математические выкладки. Все предыдущие выкладки были пересчитаны с учетом двух аномалии. Минимизируемый функционал тот же что в главе 3. Доказательство единственности не требуется. Методика исследования не

изменилась по сравнению с 3 главой. Провели подробный анализ различных расположении двух аномалии в исследуемой области, нашли взаимосвязь между расположениями аномалии, размерами двух аномалии и восстановлением плотности аномалии. Провели оценку точности решения обратной задачи гравиметрии на модельных данных методом Нелдера-Мида. Проанализировали влияние начального приближение на результаты счета. На основе полученной математической модели и анализа модельных данных была решена обратная задача приближенная к реальности на модельных данных.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В диссертационной работе рассматриваются математические модели распределения потенциала гравитационного поля в неоднородной среде; разработан алгоритм численного исследования математической модели, его программная реализация и анализ влияния параметров процесса; сформулирована постановка задачи восстановления плотности гравитационной аномалии по результатам измерения градиента гравитационного поля на внешней или внутренней поверхности.

В диссертации содержатся новые научно обоснованные результаты, совокупность которых является достижением в развитии решения обратных задач гравиметрии для нефтегазового месторождения.

Основные результаты и выводы диссертационного исследования заключаются в следующем:

1. Рассмотрена математическая модель распределения потенциала гравитационного поля в неопределенной среде. На основе численного анализа исследовано влияние расположения гравитационной аномалии и ее размеров на градиент поля на поверхности земли.

2. Решена прямая задача гравиметрии с использованием данных геолого-литологического профиля реального нефтегазового месторождения. Разработана программа «Converter» для преобразования данных геолого-литографического профиля нефтяного месторождения в цифровой формат в виде массива в среде Python. Разработанная программа подтверждена авторским свидетельством [17, с. 1] и стала одним из ключевых элементов ГИС проекта AP05135158 «*Development of geographic information system for solving the problem of gravimetric monitoring of the state of the subsoil of oil and gas regions of Kazakhstan based on high performance computing in conditions of limited experimental data*».

3. Поставлена задача восстановления плотности гравитационной аномалии по результатам измерения градиента потенциала гравитационного поля на внешней поверхности рассматриваемой области. Соответствующая обратная задача сводится к двум оптимизационным задачам. Доказана единственность решения полученных задач. Разработан алгоритм численного решения обратной задачи с использованием градиентного метода и метода Монте-Карло [68-70]. С помощью компьютерного анализа установлено влияние расположения аномалии и ее размеров на точность решения рассматриваемой обратной задачи гравиметрии.

4. В целях уточнения граничных условий при постановке обратной задачи гравиметрии предложено искусственно расширить заданную область, в результате чего результаты измерения гравитационного поля оказываются на внутренней поверхности расширенной области. Показано, что применение градиентного метода для решения соответствующей обратной задачи оказывается не эффективным в виду необходимости вычисления производной

от дельта-функции при определении градиента минимизируемого функционала. Соответствующая обратная задача гравиметрии решена с помощью метода Нелдера-Мида. Численное решение задачи проведено для различных вариантов расположения гравитационной аномалии и ее размеров.

5. Поставлена задача восстановления плотностей двух гравитационных аномалий по результатам измерения градиента потенциала гравитационного поля на внутренней поверхности рассматриваемой области. Решение задачи найдено с помощью метода Нелдера-Мида для различных вариантов взаимного расположения гравитационных аномалий и их размеров.

Оценка полноты решений поставленных задач. В диссертационной работе рассматривается распространение гравитационного поля в неоднородной среде применительно к нефтегазовым месторождениям. Рассматривается математическая модель исследуемой системы. Предложен алгоритм решения соответствующей прямой задачи гравиметрии с использованием данных геолого-литологического профиля реального месторождения с разработкой соответствующего программного обеспечения. Проведено численное решение задачи для различных расположений, форм и размеров гравитационных аномалий. Ставится задача восстановления плотности гравитационной аномалии по результатам измерения градиента потенциала гравитационного поля на внешней и внутренней поверхности рассматриваемой области. Рассмотрен случай наличия одной и двух гравитационных аномалий. Разработан алгоритм численного решения поставленных обратных задач и соответствующее программное обеспечение. Решение задач получено для различных геометрических характеристик гравитационных аномалий. Таким образом, все поставленные в диссертации задачи решены полностью.

Рекомендации по конкретному использованию полученных результатов. Рассмотренные прямые и обратные задачи гравиметрии, разработанные методы их исследования и соответствующее программное обеспечение могут найти широкое практическое применение в нефтегазодобывающей промышленности при мониторинге действующих нефтегазовых месторождений и проектировании новых месторождений, а также в других областях геологоразведки для ускоренного уточнения подземных данных.

Оценка научного уровня выполненной работы в сравнении с лучшими достижениями в данной области. Диссертационная работа выполнена на основе современных методов геофизики, математического моделирования, прямых и обратных задач математической физики, вычислительной математики и информационных технологий. Результаты работы конкурентоспособны, выполнены на современном научном уровне и максимально адаптированы под реальные условия и позволяют повысить эффективность разведки подземных недр на основе гравиметрических показаний.

Основные результаты работы докладывались и обсуждались на следующих мероприятиях:

– научные семинары Института механики и машиноведения имени У.А. Джолдасбекова (2017 - 2023 гг., Алматы);

– Международная конференция «Inverse Problems in Finance, Economics and Life Sciences» (КазНУ им. аль-Фараби, Алматы, Казахстан, декабрь 2017 г.);

– V Международная конференция «Фарабиевские чтения» (КазНУ им. аль-Фараби, Алматы, Казахстан, апрель 2018 г.);

– Международная научно-практическая конференция «Актуальные проблемы информатики, механики и робототехники. Цифровые технологии в машиностроении» (ИММаш им. У.А. Джолдасбекова, Алматы, Казахстан, октябрь 2018 г.);

– Десятая международная молодежная научная школа-конференция «Теория и численные методы решения обратных и некорректных задач» (НГУ, Новосибирск, Россия, октябрь 2018 г.);

– XIII международная конференция «Параллельные вычислительные технологии» (Калининград, Россия, апрель 2019 г.);

– Одиннадцатая международная молодежная научная школа-конференция «Теория и численные методы решения обратных и некорректных задач» (НГУ, Новосибирск, Россия, август 2019 г.);

– Традиционная международная апрельская математическая конференция в честь Дня работников науки Республики Казахстан, посвященная 1150-летию Абу Насыр аль-Фараби и 75-летию Института математики и математического моделирования. (Алматы, Казахстан, апрель 2020 г.);

– научные семинары кафедры Механики КазНУ им. аль-Фараби (2017–2020 гг., Алматы).

#### Публикации

По теме диссертации автором было опубликовано 15 работ, в том числе 2 публикации в научных изданиях, входящих в перечень рекомендованных Комитетом по контролю в сфере образования и науки МОН РК для публикации основных результатов научной деятельности, 4 публикации в научном журнале индексируемый базой данных Scopus; 9 публикаций в трудах зарубежных и отечественных научных конференций, среди которых 1 публикации в материалах зарубежных конференций, 4 публикации в трудах всероссийских научных конференций, 4 публикации в материалах отечественной конференции. Получено одно авторское свидетельство на разработанную программу «Converter».

## СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1 Serovajsky S.Ya., Kenzhebayeva M.O. Modeling of the potential of the gravitational field at the upper boundary of the region with the existence of a subterranean anomaly // International Journal of Mathematics and Physics. – 2018. – №1. – С. 20–26.

2 Kenzhebayeva M.O. The restoration of the density of a homogeneous anomaly from the measurement of the gravitational potential and its derivative on the earth's surface: International conference Inverse problems in Finance, Economics and Life Sciences. - Almaty, 2017. – 16 p.

3 Ya S., Serovajsky A.A., Azimov M.O., Kenzhebayeva D.B., Nurseitov A.T. Nurseitova M.A., Sigalovskiy Mathematical problems of gravimetry and its applications // International Journal of Mathematics and Physics. – 2019. – №1. – P. 29–35.

4 Кенжебаева М. О. Определение приближенного горизонтального месторасположения аномалии на основе гравиметрических показаний. V Международной конференции «Фарабиевские чтения» КазНУ им. аль-Фараби. - Алматы, 2018. – С.106.

5 Кенжебаева М. О. Влияние подземной аномалии на гравитационное поле поверхности земли Казахский национальный педагогический университет имени Абая // Вестник серия «Физико-математические науки». – 2018. - №3(63).- С. 269-274.

6 Nurseitov D.B., Toiganbayeva N.A., Kenzhebayeva M.O. Images converter of geologic-lithographic profiles // News of the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan. Series of geology and technology sciences. - 2021. - №1(445). - P. 121-126.

7 Азимов А.А., Кенжебаева М.О., Нурсейтов Д.Б., Нурсейтова А.Т., Серовайский С.Я., Сигаловский М.А. Оптимизационные методы решения обратной задачи гравиразведки. Четырнадцатая Международная Азиатская Школа-семинар «Проблемы оптимизации сложных систем». - Кыргызская Республика. - 2018. - С. 72-79.

8 Кенжебаева М. О. Постановка обратной задачи гравиметрии на реальных данных. Одиннадцатая международная молодежная научная школа-конференция «Теория и численные методы решения обратных и некорректных задач» НГУ, Новосибирск, Академгородок, Россия, 2019.

9 Kenzhebayeva M.O. Formulation of the gravimetry inverse problem for real data. Одиннадцатая международная молодежная научная школа-конференция «Теория и численные методы решения обратных и некорректных задач» НГУ, Новосибирск, Академгородок. - Россия, 2019.

10 Toiganbaeva N.A., Kenzhebayeva M.O. Development of a program for converting graphic information of geological and lithographic profiles into digital information. Традиционная международная апрельская математическая конференция в честь Дня работников науки Республики Казахстан,

посвященная 1150-летию Абу Насыр аль-Фараби и 75-летию Института математики и математического моделирования. 01.04-03.04.2020 - С. 143- 144.

11 Kenzhebayeva M.O. Analysis of the gradient and potential of the anomaly gravitational field // Вестник Карагандинского университета. Серия «Математика». - 2019. - №1(93). – С. 140-145.

12 Проблемы оптимизации сложных систем Кенжебаева М.О. Использование возможностей Wolfram mathematica 7.0 при решении задач механики. Международная научно-практическая конференция "Актуальные проблемы информатики, механики и робототехники. Цифровые технологии в машиностроении. - Алматы, КАЗАХСТАН, Институт механики и машиноведения имени У.А.Джолдасбекова, 2018. - С.91-92.

13 Кенжебаева М.О. Сравнение показаний потенциала гравитационного поля и его градиента. Конференция "Десятая международная молодежная научная школа-конференция «Теория и численные методы решения обратных и некорректных задач» РОССИЯ. - Новосибирск, Академгородок, 2018. - 30 с.

14 Kenzhebayeva M.O. Two optimization methods for solving the inverse gravimetric problem // Journal of Physics: Conference Series. – 2017. - №2092(1). 012017 p.

15 Марченко М.А., Серовайский С.Я., Смирнов Д.Д., Кенжебаева М.О. Решение обратной задачи гравиметрии методом Монте-Карло на суперкомпьютере с использованием распределённых вычислений. Параллельные вычислительные технологии – XIII международная конференция, ПаВТ'2019, г. Калининград, 2–4 апреля 2019. - С. 327-338.

16 Авторское свидетельство. Нурсейтов Д.Б., Тойганбаева Н.А., Кенжебаева М.О. №9556 от 30.04.2020.

17 Романов В.Г., Кабанихин С.И. Обратные задачи геоэлектрики. – М.: Наука, 1991. – 304 с.

18 Кабанихин С.И. Обратные и некорректные задачи. – Новосибирск: Сибирское научное изд-во, 2009. – 458 с.

19 Кабанихин С.И., Искаков К.Т., Бектемесов М.А., Шишленин М.А. Алгоритмы и численные методы решения обратных и некорректных задач. – Астана: Изд-во ЕНУ им. Гумилева, 2011. – 328 с.

20 Васин В.В., Акимова Е.Н., Миниахметова А.Ф. Итерационные алгоритмы ньютоновского типа и их приложения к обратной задаче гравиметрии // Вестник ЮУрГУ. - 2013. – №3. – С. 26–37.

21 Керимов И.А. Метод F-аппроксимации при решении задач гравиметрии и магнитометрии. – М., Физматлит, 2011.

22 Страхов В.Н. Алгоритмы редуцирования и трансформаций аномалий силы тяжести, заданных на физической поверхности Земли // Интерпретация гравитационных и магнитных полей. - Киев: Наукова думка, 1992. - С. 4–81.

23 Страхов В.Н. Современное состояние и перспективы развития теории интерпретации гравитационных и магнитных аномалий // Вопросы теории и практики геологической интерпретации гравитационных, магнитных и электрических полей. - Воронеж, 1998. - С. 4–35.

- 24 Страхов В.Н. Что делать? (О развитии гравиметрии и магнитометрии в России в начале XXI века) // Геофизика. - 1999. - № 1. - С. 3–10.
- 25 Страхов В.Н. Три парадигмы в теории и практике интерпретации потенциальных полей (анализпрошлого и прогнозбудущего). - М.: ОИФЗ РАН, 1999. - 78 с.
- 26 Страхов В.Н. Геофизика и математика // Основные проблемы теории интерпретации гравитационных и магнитных полей / Сборник научных трудов. — М.: ОИФЗ РАН, 1999. - С. 5–64.
- 27 Страхов В.Н. Разрушение господствующего стереотипа мышления главнейшая задача в развитии теории и практики интерпретации потенциальных полей (гравитационных и магнитных аномалий) в начале XXI века. — М.: ОИФЗ РАН, 2000. - 44 с.
- 28 Балк П.И. Столкновение геофизических и математических интересов главный источник противоречий в современной теории интерпретации потенциальных полей // Геофизический журнал. - 2000. - Т. 22, № 4. - С.3-20.
- 29 Гордин В.М., Тихоцкий С.А. Истокообразные аппроксимации гравитационных и магнитных полей: история вопроса // Геофизика и математика: Материалы 1-й Всероссийской конференции, Москва 22–26 ноября 1999 . — М.: ОИФЗ РАН, 1999. - С. 55–57.
- 30 Гравиразведка: Справочник геофизика / под ред. Е.А. Мудрецовой. — М.: Недра, 1981.- № 3. - 97 с.
- 31 Гравиразведка: Справочник геофизика / под ред. Е.А. Мудрецовой, К.Е.Веселова. - М.: Недра, 1990. - 607 с.
- 32 Керимов И.А. Методологические основы интерпретации данных гравиметрии и магнитометрии // Тр. КНИИ РАН.— М.: Комтехпринт, 2009. - Вып.2. - С. 258–268.
- 33 Козленко В.Г. Системная интерпретация геофизических полей. - Киев: Наукова думка, 1984. - 220 с.
- 34 Костицын В.И., Колосов А.И. Геофизическая кибернетика. - Пермь: ПГУ, 1989. - 96 с.
- 35 Хаин В.Е., Рябухин А.Г. История и методология геологических наук. — М.: МГУ, 1997. - 224 с.
- 36 Страхов В.Н. Научное мировоззрение I // Геофизика. -1993. - № 1. - С. 7–15.
- 37 Страхов В.Н. Научное мировоззрение II // Геофизика. -1994.- № 1. -С. 9–21.
- 38 Страхов В.Н. Геофизика и математика // Физика Земли, 1995. № 12. С. 4–23.
- 39 Страхов В.Н. Основные направления развития теории и методологии интерпретации геофизических данных на рубеже XXI столетия // Геофизика. 1995. - № 3. - Ч. I. - С. 9–18.
- 40 Страхов В.Н. Основные направления развития теории и методологии интерпретации геофизических данных на рубеже XXI столетия // Геофизика. 1995.- № 4. - Ч. II. - С. 10–20.

41 Страхов В.Н. Методологические проблемы теории и практики интерпретации данных в прикладной геофизике // Тр. конференции "Методологии прикладной геофизики": Тез. докл. Москва, 7–8 фев. 1996. — М.: ОИФЗ РАН, 1996. - С. 4–20.

42 Страхов В.Н. Методологические особенности интерпретации данных гравиразведки и магниторазведки // Тр. конф. "Вопросы методологии и интерпретации геофизических данных в прикладной геофизике". - М.: ОИФЗ РАН, 1996. - С. 110–123.

43 Старостенко В.И. (ред.). Алгоритмы, методика и результаты интерпретации геофизических данных // Материалы VII научно-техн. конф. геофизиков Украины. - Киев: Наук. думка, 1985. - 260 с.

44 Алексидзе М.А. Приближенные методы решения прямых и обратных задач гравиметрии. – М., Наука, 1987.

45 Голов И.Н., Сизиков В.С. Обратная задача гравиметрии как задача внутривидения <https://cyberleninka.ru/article/n/obratnaya-zadacha-gravimetrii-kak-zadacha-vnutrivideniya>. 10.04.2020.

46 Старостенко В.И. Устойчивые численные методы в задачах гравиметрии. - Киев: Наукова думка, 1978. - 228 с.

47 Старостенко В.И., Страхов В.Н. (ред.). Теория и методика интерпретации гравимагнитных полей // Докл. всесоюзн. семинара. - Киев.: Наук. думка, 1981. - 411 с.

48 Хмелевской В.К., Костицын В.И. Основы геофизических методов. – Пермь, 2010.

49 Алексидзе М.А. Приближенные методы решения прямых и обратных задач гравиметрии. – М., Наука, 1987.

50 Глуска В.Б., Мудрецова Е.А., Страхов В.Н. Обратные задачи гравиметрии и магнитометрии // Некорректные задачи естествознания / Под ред. А.Н. Тихонова, А.В. Гончарского. - М.: Изд-во МГУ, 1987. - С. 89–102.

51 Сизиков В.С. Математические методы обработки результатов измерений. СПб: Политехника, 2001. - 240 с.

52 Старостенко В.И., Страхов В.Н. (ред.). Теория и методика интерпретации гравимагнитных полей // Докл. всесоюзн. семинара. - Киев.: Наук. думка, 1981. - 411 с.

53 Малых М.Д. Уравнения математической физики. Курс лекции, прочитанных 2012-2013 учебном году на факультете наук о материалах МГУ, 2012. – 178 с.

54 Сорокин Л.В. Гравиметрия и гравиметрическая разведка. Учебник 3-е издание // Нефтяная и горно-топливная литература, 1953. – 484 с.

55 Грушинский Н.П. Введение в гравиметрию и гравиметрическую разведку. Учебное пособие. - М., 1961. – 206 с.

56 Иванов В.А. Внутривидение (ЯМР-томография). - Л.: Знание, 1989. - 32 с.

- 57 Голов И.Н. Задача интерпретации гравиметрических измерений как задача томографии и внутривидения // Изв. вузов. Приборостроение. 2002. - Т. 45 (в печати).
- 58 Камбаров Н.Ш., Приходько В.А., Тараканов Ю.А. Интерпретация гравитационных аномалий. Спутниковая гравиметрия. Учебное пособие // -М.: 1987. – 151 с.
- 59 Дубошин Г.Н. Небесная механика. Основные задачи и методы. Изд. 3-е. - М.: Наука. 1975. - 800 с.
- 60 Верлань А.Ф., Сизиков В.С. Интегральные уравнения: методы, алгоритмы, программы. - Киев: Наукова думка, 1986. - 544 с.
- 61 Химмельблау Д. Прикладное нелинейное программирование. - М.: Мир, 1975. - 536 с.
- 62 Балк П.И., Долгаль А.С. Обратные задачи гравиметрии как задачи извлечения достоверной информации в условиях неопределенности // Физика Земли. – 2012. - №5. - С. 85-101.
- 63 Акимова Е.Н., Белоусов Д.В., Мисиллов В.Е. Алгоритмы решения обратных геофизических задач на многопроцессорных вычислительных системах // Сиб. журн.вычисл.матем. - 2013. – Т. 16, №2. - С. 107–121.
- 64 Misici L., Zirilli F. The Inverse Gravimetry Problem: An Application to the Northern San Francisco Craton Granite // Journal of Optimization Theory and Applications. 1989. - Vol. 3, № 1. - P. 39-49.
- 65 Гасников А.В. Современные численные методы оптимизации. Метод универсального градиентного спуска: учеб. пособие– М.: МФТИ, 2018.
- 66 <https://wiki.web.ru/wiki/%D0%93%D1%80%D0%B0%D0%B2%D0%B8%D1%80%D0%B0%D0%B7%D0%B2%D0%B5%D0%B4%D0%BA%D0%B0>  
15.10.2018.
- 67 <http://www.100byte.ru/python/nm/nm.html> 20.09.2019.
- 68 Михайлов Г.А. Численное статистическое моделирование. Методы Монте-Карло. – Москва: Издательский центр «Академия», 2006. – 368 с
- 69 Марченко М.А. Библиотека PARMONC для решения «больших» задач по методу Монте-Карло // Вестник нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. – 2012. – С. 392–397.
- 70 Марченко М.А., Иванов А.А., Смирнов Д.Д. Комплекс программ AMKS для численного решения СДУ методом Монте-Карло на суперкомпьютерах //Вычислительные технологии. – 2017. – Т. 22. № 3. – С. 61-70.